69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 17. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu `skmo@skmo.sk` v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke `skmo.sk/dokument.php?id=429` nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

---

1. *Pat a Mat mali každý svoje obľúbené prirodzené číslo, ale každý iné. Obe čísla postupne sčítali, odčítali (menšie od väčšieho), vynásobili a vydelili (väčšie menším). Keď takto získané výsledky sčítali, vyšlo im 98. Ktoré obľúbené čísla mali Pat a Mat?* (Libuše Hozová)

Riešenie. Ak väčšie z oboch čísel označíme x a menšie y, tak podmienka zo zadania znie

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=98.$$

Keďže súčet, rozdiel aj súčin čísel x a y sú prirodzené čísla a výsledkom je tiež prirodzené číslo, musí byť x násobkom y, t. j. $x = ky$ pre nejaké prirodzené číslo k. Dosadíme do predchádzajúcej rovnosti, ktorú ďalej upravíme:

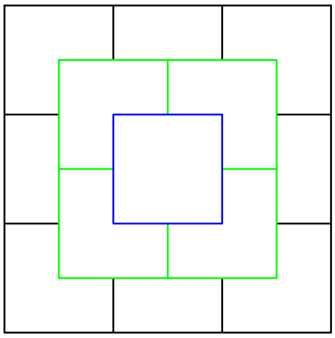
$$\begin{aligned} 2ky+ky^2+k&=98,\\ k(y^2+2y+1)&=98,\\ k\cdot(y+1)^2&=2\cdot 7^2. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $k = 2$ a $y = 6$, teda $x = 12$. (Prípadný rozklad $98 \cdot 1^2$ sme vylúčili, lebo y je prirodzené číslo, teda $y+1>1$.) Patove a Matove obľúbené čísla boli 6 a 12.

Návrh hodnotenia. 1 bod za zostavenie úvodnej rovnice; 3 body za zdôvodnenie $x = ky$, dosadenie do rovnice a následné úpravy; 2 body za výsledok.

Poznámka. Záverečná úprava (doplnenie ľavej strany na štvorec a rozklad pravej strany na súčin prvočísel) podstatne uľahčuje argumentáciu. Riešenia bez tohto nápadu vyžadujú skúšania možností odvodené z deliteľov, resp. rozkladov čísla 98. Také postupy hodnoťte podľa kvality sprievodného komentára.

2. *Obrázok predstavuje pohľad zhora na trojvrstvovú pyramídu tvorenú 14 zhodnými kockami. Každej kocke prislúcha jedno prirodzené číslo, a to tak, že čísla zodpovedajúce kockám v spodnej vrstve sú navzájom rôzne a číslo na každej ďalšej kocke je súčtom čísel zo štyroch susediacich kociek z nižšej vrstvy. Určte najmenšie číslo deliteľné štyrmi, ktoré môže prislúchať najvrchnejšej kocke.* (Alžbeta Bohiniková)



Riešenie. Číslo prislúchajúce najvrchnejšej kocke je určené štyrmi číslami z druhej vrstvy, a tie sú úplne určené číslami vo vrstve prvej. Pritom každá rohová kocka prvej vrstvy susedí s jednou kockou z druhej vrstvy, každá nerohová kocka na hrane prvej vrstvy susedí s dvoma kockami z druhej vrstvy a stredová kocka prvej vrstvy susedí so všetkými štyrmi kockami druhej vrstvy. Teda do celkového súčtu v najvrchnejšej kocke prispievajú štyri kocky jedenkrát, štyri dvakrát a jedna štyrikrát.

Pre navzájom rôzne čísla v prvej vrstve je najmenšie možné číslo v najvrchnejšej kocke rovné

$$1 \cdot (9 + 8 + 7 + 6) + 2 \cdot (5 + 4 + 3 + 2) + 4 \cdot 1 = 62.$$

Najbližšie väčšie číslo deliteľné štyrmi je 64, čo je najmenšie číslo prislúchajúce najvrchnejšej kocke, ktoré vyhovuje všetkým požiadavkám. Tento výsledok možno dosiahnuť napr. tak, že namiesto čísla 9 v predchádzajúcom súčte vezmeme číslo 11.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie najmenšieho možného čísla; 2 body za určenie najmenšieho čísla deliteľného štyrmi a konkrétnej vyhovujúcej realizácie; 2 body podľa kvality komentára.

Poznámka. Označme čísla v prvej vrstve nasledovne:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

Potom čísla v druhej vrstve sú:

$$\begin{array}{cc} a+b+d+e & b+c+e+f \\ d+e+g+h & e+f+h+i \end{array}$$

A číslo v najvrchnejšej kocke je:

$$a + c + g + i + 2(b + d + f + h) + 4e$$

3. *Uvažujme štvorciferné prirodzené číslo s nasledujúcou vlastnosťou: ak prehodíme jeho prvé dvojčíslie s druhým, dostaneme štvorciferné číslo o 99 menšie. Koľko je takých čísel celkom a koľko z nich je deliteľných 9?* (*Karel Pazourek*)

Riešenie. Označme pôvodné štvorciferné číslo $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Podľa zadania platí $\overline{abcd} = \overline{cdab} + 99$, pričom b a d sú celé čísla od 0 do 9, a a c sú celé čísla od 1 do 9 a navyše $a \geqq c$. Rozpísaním a úpravou predchádzajúcej rovnosti dostávame:

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d &= 1000c + 100d + 10a + b + 99, \\ 990a - 990c &= 99d - 99b + 99, \\ 10(a - c) &= d - b + 1. \end{aligned}$$

Z predchádzajúcich obmedzení vyplýva, že číslo $d - b + 1$ na pravej strane môže nadobúdať hodnoty od -8 do 10. Z rovnosti navyše vyplýva, že toto číslo má byť násobkom 10, teda buď 10, alebo 0. Obe možnosti rozoberieme zvlášť:

a) $10(a - c) = d - b + 1 = 10$, tzn. $a = c + 1$, $d = 9$ a $b = 0$. Čísel tohto tvaru je celkom osem (pre c od 1 do 8):

$$2019,\ 3029,\ 4039,\ 5049,\ 6059,\ 7069,\ 8079,\ 9089.$$

Medzi nimi je iba číslo 5049 deliteľné deviatimi (ciferný súčet $2c+1+9$ je deliteľný deviatimi pre $c = 4$).

b) $10(a - c) = d - b + 1 = 0$, tzn. $a = c$ a $b = d + 1$. V tomto prípade môžeme dosadzovať c od 1 do 9 a d od 0 do 8, t. j. celkom $9 \cdot 9 = 81$ možností:

$$\begin{matrix} 1110, & \ldots, & 1918, \\ \vdots & & \vdots \\ 9190, & \ldots, & 9998. \end{matrix}$$

Ciferný súčet čísel tohto tvaru je $2(c + d) + 1$, a ten je v rámci našich obmedzení deliteľný deviatimi buď pre $c + d = 4$, alebo pre $c + d = 13$. V prvom prípade dostávame štyri čísla:

$$1413,\ 2322,\ 3231,\ 4140.$$

V druhom prípade dostávame päť čísel:

$$5958,\ 6867,\ 7776,\ 8685,\ 9594.$$

Všetkých čísel vyhovujúcich prvej časti zadania je $8+81 = 89$. Medzi týmito číslami je $1 + 4 + 5 = 10$ deliteľných deviatimi.

Návrh hodnotenia. 2 body za prípravné úpravy a postrehy; 2 body za výsledok; 2 body za úplnosť a kvalitu komentára.

Poznámka. Na zadanie úlohy je možné pozerať sa ako na algebrogram:

$$\begin{array}{r} c\ d\ a\ b \\ +\quad\ \ 9\ 9 \\ \hline a\ b\ c\ d \end{array}$$

Niektoré z predchádzajúcich úvah môžu byť v tomto prevedení názornejšie.

4. *Do všeobecného trojuholníka ABC narysujte bod D tak, aby obsah trojuholníka ABD bol rovný polovici obsahu trojuholníka ABC a obsah trojuholníka BCD bol rovný šestine obsahu trojuholníka ABC.*
(Riešenie má byť všeobecne platné, teda nezávislé na zvolenom trojuholníku, jeho špeciálnych vlastnostiach či rozmeroch. Konštrukcia nemôže byť založená na meraní a počítaní. Zvoľte si trojuholník, ktorý nie je rovnoramenný ani pravouhlý.)

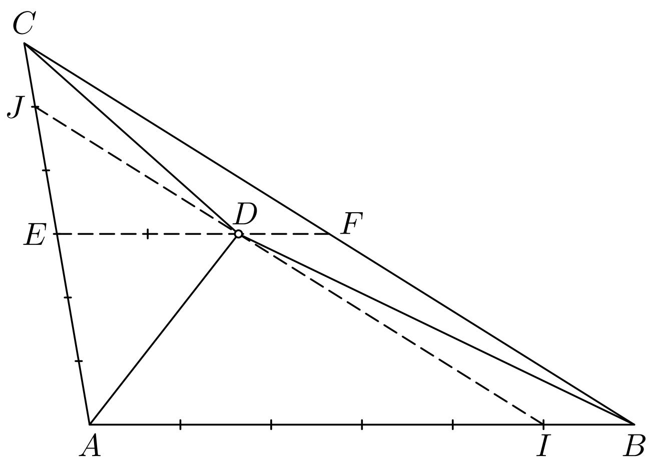
(*Libuše Hozová*)

Riešenie. Rozbor:

Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú stranu AB, teda obsahy týchto trojuholníkov sú v rovnakom pomere ako veľkosti ich výšok na stranu AB. Výška druhého trojuholníka preto musí byť polovičná vzhľadom k výške prvého. To znamená, že vrchol D leží na strednej priečke trojuholníka ABC rovnobežnej so stranou AB. Táto priamka je určená bodmi E a F, čo sú postupne stredy strán AC a BC.

Trojuholníky ABC a BCD majú spoločnú stranu BC, teda obsahy týchto trojuholníkov sú v rovnakom pomere ako veľkosti ich výšok na stranu BC. Výška druhého trojuholníka preto musí byť šestinová vzhľadom k výške prvého. To znamená, že vrchol D leží na priamke, ktorá je rovnobežná so stranou BC a ktorej vzdialenosť od BC je šestinová vzhľadom na vzdialenosť vrcholu A od BC. Táto priamka je určená bodmi I a J, ktoré ležia postupne v šestinách úsečiek BA a CA, pozri obrázok.

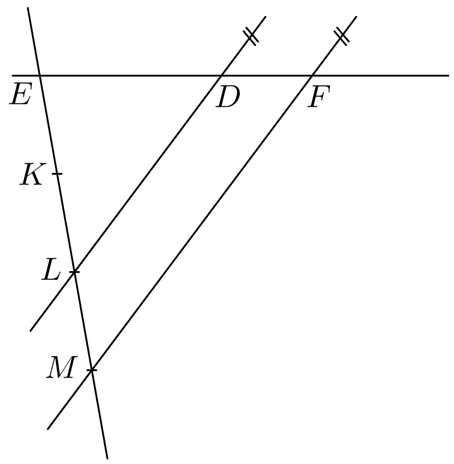
Keďže stredná priečka EF je zhodná s polovicou strany AB, leží bod D v tretine úsečky FE, bližšie bodu F.



Konštrukcia:

- Bod E ako stred úsečky AC.
- Bod F ako stred úsečky BC.
- Bod D v tretine úsečky FE, bližšie bodu F.

Stred úsečky je možné zostrojiť pomocou priesečníkov zhodných kružníc so stredmi v koncových bodoch alebo pomocou podobných trojuholníkov. Tretinu úsečky je možné zostrojiť pomocou podobných trojuholníkov:



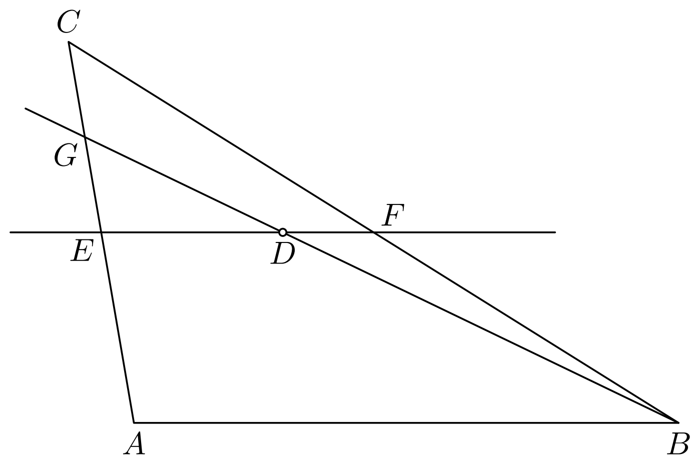
- Body K, L, M na ľubovoľnej priamke prechádzajúcej E s rovnakými vzdialenosťami $|EK| = |KL| = |LM|$.
- Bod D ako priesečník priamky EF a rovnobežky s priamkou FM idúcej bodom L.

Návrh hodnotenia. 3 body za rozbor úlohy s jednoznačným vymedzením bodu D; 3 body za konštrukciu bodu D (z toho 1 bod za korektnú konštrukciu tretiny, resp. šestiny úsečky).

Poznámky. Riešenie možno založiť na správnom rozdelení výšok a rovnobežkách s príslušnými stranami. Pomocné body E, F, I a J na stranách trojuholníka nie sú na zostrojenie bodu D nevyhnutné.

Obsahy trojuholníkov ABD a BCD sú postupne rovné polovici a šestine obsahu trojuholníka ABC. Obsah doplnkového trojuholníka ACD je preto rovný tretine trojuholníka ABC $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3})$. Obsahy trojuholníkov BCD a ACD sú teda v pomere $1 : 2$ a v rovnakom pomere musia byť aj veľkosti úsečiek DF a DE. Takto možno alternatívne zdôvodniť, že bod D leží v tretine úsečky FE.

Bod F je stredom úsečky BC, teda priamka EF je ťažnicou trojuholníka BCE. Bod D je v tretine úsečky FE bližšie bodu F, teda D je ťažiskom trojuholníka BCE. To znamená, že priamka BD je jeho ťažnicou, a teda pretína úsečku CE v jej strede. Bod D možno alternatívne zostrojiť (bez delenia úsečiek na tretiny, resp. šestiny) ako priesečník priamok EF a BG, pričom G je stredom úsečky CE:



Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020