---

1. *Naša stará mama nakupovala v obchode, v ktorom mali iba jablká, banány a hrušky. Jablká boli po 50 centoch za kus, hrušky po 60 centoch a banány boli lacnejšie ako hrušky. Stará mama kúpila päť kusov ovocia, medzi ktorými bol práve jeden banán, a zaplatila 2 eurá a 75 centov. Koľko centov mohol stáť jeden banán? Určte všetky možnosti.* (*Katarína Jasenčáková*)

Nápad. Začnite počítať s ovocím, ktorého cenu poznáte.

Riešenie. Okrem banánu stará mama kúpila jablká a hrušky, ktorých ceny za kus poznáme. Jabĺk a hrušiek boli celkom štyri kusy. Rozoberieme jednotlivé možnosti a určíme útratu za jablká a hrušky. Odčítame od celkovej útraty a z toho zistíme cenu banánu, ktorú porovnáme s cenou hrušky:

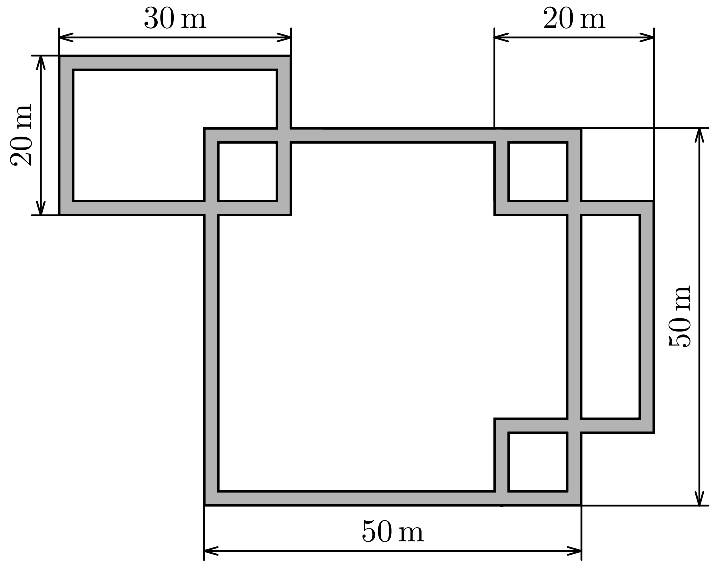
- Štyri jablká a žiadna hruška stoja $4 \cdot 50 = 200$ centov; jeden banán by stál $275 - 200 = 75$ centov, čo je viac ako cena hrušky.
- Tri jablká a jedna hruška stoja $3 \cdot 50 + 1 \cdot 60 = 210$ centov; jeden banán by stál $275 - 210 = 65$ centov, čo je viac ako cena hrušky.
- Dve jablká a dve hrušky stoja $2 \cdot 50 + 2 \cdot 60 = 220$ centov; jeden banán by stál $275 - 220 = 55$ centov, čo je menej ako cena hrušky.
- Jedno jablko a tri hrušky stoja $1 \cdot 50 + 3 \cdot 60 = 230$ centov; jeden banán by stál $275 - 230 = 45$ centov, čo je menej ako cena hrušky.
- Žiadne jablko a štyri hrušky stoja $4 \cdot 60 = 240$ centov; jeden banán by stál $275 - 240 = 35$ centov, čo je menej ako cena hrušky.

Banán mohol stať 35, 45, alebo 55 centov.

Poznámka. Hruška je o 10 centov drahšia ako jablko, a práve o toľko sa musí znížiť cena banánu, ak vymeníme v uvažovanom nákupe jablko za hrušku. S týmto postrehom možno predchádzajúcu diskusiu značne zjednodušiť.

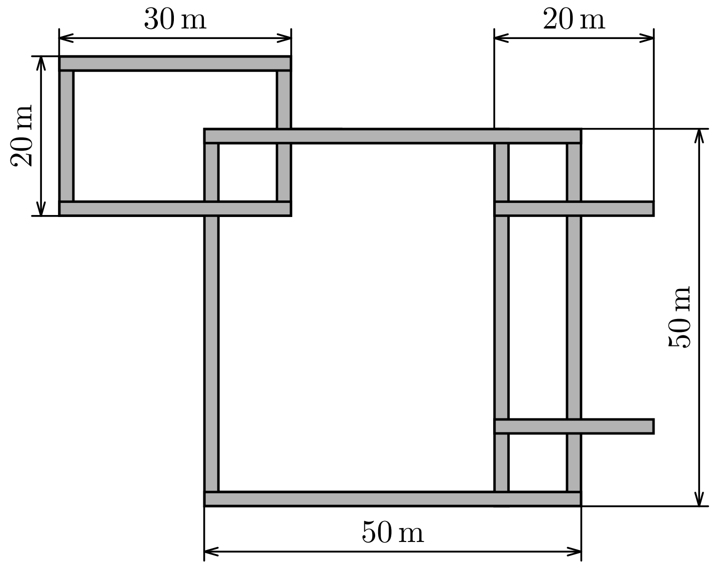
---

2. *Všetky cesty v parku sú meter široké a sú tvorené celými štvorcovými dlaždicami s rozmermi meter krát meter, ktoré k sebe natesno priliehajú. Cesty, pri ktorých sa majú vymeniť všetky dlaždice, sú schematicky znázornené na obrázku. Koľko dlaždíc sa má vymeniť?* (*Eva Semerádová*)



Nápad. Potrebujete poznať, kde presne sa cesty křížia?

Riešenie. Presné umiestnenie kríženia ciest nie je zo zadania zrejmé, to však nemá na výsledok žiadny vplyv. Pri počítaní musíme dbať na to, aby sme dlaždice v kríženiach ciest rovnako ako v rohoch započítavali iba raz. Preto budeme rozlišovať cesty, ktoré sú zakreslené vodorovne, od tých zakreslených zvislo. Jednotlivé časti môžeme navyše pre lepšiu názornosť presúvať. Napr. nasledujúca sústava ciest má rovnaký počet dlaždíc ako tá pôvodná:



Najskôr sčítame dlaždice na vodorovných cestách (zhora nadol, zľava doprava):

$$30 + 50 + 30 + 20 + 20 + 50 = 2 \cdot (30 + 50 + 20) = 200.$$

Teraz sčítame dlaždice na zvislých cestách, ktoré nie sú započítané v kríženiach a rohoch (zľava doprava, zhora nadol):

$$(20 - 2) + (50 - 3) + (20 - 3) + (50 - 4) + (50 - 4) = 190 - 16 = 174.$$

Celkom sa má vymeniť $200 + 174 = 374$ dlaždíc.

3. *Pán kráľ rozdával svojim synom dukáty. Najstaršiemu synovi dal určitý počet dukátov, mladšiemu dal o jeden dukát menej, ďalšiemu dal opäť o jeden dukát menej a takto postupoval až k najmladšiemu. Potom sa vrátil k najstaršiemu synovi, dal mu o jeden dukát menej ako pred chvíľou najmladšiemu a rovnakým spôsobom ako v prvom kole rozdával ďalej. V tomto kole vyšiel na najmladšieho syna jeden dukát. Najstarší syn dostal celkom 21 dukátov. Určte, koľko mal kráľ synov a koľko im celkom rozdal dukátov.*
(*Karel Pazourek*)

Nápad. Koľko dukátov by dostal najstarší syn, ak by kráľ rovnakým spôsobom rozdával napr. štyrom synom?

Riešenie. Pre konkrétny počet synov si možno kráľov spôsob rozdávania dukátov názorne vyskúšať. Stačí postupovať odzadu: najmladší v druhom kole dostal jeden dukát, druhý najmladší dva dukáty atď. Napr. pre dvoch, troch, resp. štyroch synov by počty dukátov v jednotlivých kolách vyzerali nasledovne (zoradené zhora nadol podľa kôl, zľava doprava podľa veku):

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Najstarší syn by v prvom prípade dostal 6, v druhom prípade 9, resp. v treťom prípade 12 dukátov. Týmto spôsobom možno postupne nájsť situáciu, keď najstarší syn dostal 21 dukátov:

$$\begin{array}{ccccccc} 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Teda kráľ mal 7 synov a celkom im rozdal 105 dukátov.

Poznámky. Namiesto skúšania si možno všimnúť, že zo zadania vyplýva nasledujúce: najstarší syn v druhom kole dostane práve toľko dukátov, koľko je synov, a v prvom kole dvojnásobok, celkom teda trojnásobok počtu synov. Aby tento počet bol rovný 21, musí byť 7 synov a celkový počet dukátov $1 + 2 + \cdots + 14 = 105$.

Súčet rozdaných dukátov možno určiť rôzne, napr. nasledujúcou skratkou:

$$(1 + 14) + (2 + 13) + \cdots + (7 + 8) = 7 \cdot 15 = 105.$$

4. *Vojto začal vypisovať do zošita číslo terajšieho školského roku 201920202019202020... a tak pokračoval stále ďalej. Keď napísal 2020 cifier, prestalo ho to baviť. Koľko tak napísal dvojok?*
(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Koľko dvojok by Vojto napísal, keby vypisoval iba 20 cifier?

Riešenie. Číslo školského roku 20192020 je osemciferné a obsahuje tri dvojky. Keďže $2020 = 8 \cdot 252 + 4$, Vojto napísal 252-krát celé číslo 20192020 a na zvyšné štyri miesta číslo 2019.

Celkom teda Vojto napísal $252 \cdot 3 + 1 = 757$ dvojok.

5. *Dedko má v záhrade tri jablone a na nich celkom 39 jabĺk. Jablká rastú iba na ôsmich konároch: na jednej jabloni plodia dva konáre, na dvoch jabloniach plodia po tri konáre. Na rôznych konároch sú rôzne počty jabĺk, ale na každej jabloni je rovnaký počet jabĺk. Koľko jabĺk mohlo byť na jednotlivých konároch? Určte aspoň jednu možnosť.*

(*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Koľko jabĺk bolo na každej z jabloní?

Riešenie. Na každej jabloni je rovnaký počet jabĺk a celkom ich je 39. Na každej jabloni teda rastie 13 jabĺk. Na rôznych konároch sú rôzne počty jabĺk a počty konárov na jednotlivých stromoch sú 2, 3 a 3.

Teda hľadáme osmice navzájom rôznych čísel, z ktorých vyberáme dvojicu a dve trojice s rovnakým súčtom 13. Také osmice sú:

$$\begin{array}{lll} 2,11, & 1,5,7, & 3,4,6, \\ 3,10, & 1,4,8, & 2,5,6, \\ 4,9, & 1,5,7, & 2,3,8, \\ 5,8, & 1,2,10, & 3,4,6, \\ 5,8, & 1,3,9, & 2,4,7. \end{array}$$

6. *Obdĺžnikový obrus je poskladaný z rovnako veľkých štvorcov bielej, sivej a čiernej farby, a to tak, že*

- *štvorce so spoločnou stranou majú rôzne farby,*
- *biele štvorce nemajú spoločný vrchol,*
- *čierne štvorce nemajú spoločný vrchol,*
- *čiernych štvorcov je šesť,*
- *na každej strane obrusu sú najmenej tri štvorce.*

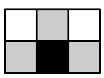
Ako mohol obrus vyzerať? Nájdite a nakreslite aspoň tri možnosti.

(*Katarína Jasenčáková*)

Nápad. Ktoré štvorce sa môžu vyskytovať v jednom riadku, príp. stĺpci?

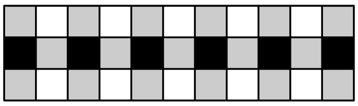
Riešenie. V žiadnom riadku a stĺpci nemôžu byť dva štvorce rovnakej farby vedľa seba; budeme uvažovať možnosti po riadkoch:

- Ak by v riadku susedil biely a čierny štvorec, tak zodpovedajúce štvorce v ďalšom riadku nemožno vyfarbiť žiadnou dvojicou farieb tak, aby sme vyhoveli všetkým uvedeným požiadavkám.
- Ak by v jednom riadku susedil biely a sivý štvorec, tak zodpovedajúce štvorce v druhom riadku musia byť sivý a čierny (aby sa striedali farby a biele štvorce nesusedili vrcholom). Potom ale ďalší štvorec v prvom riadku musí byť opäť biely a zodpovedajúci štvorec v druhom riadku sivý (aby sa striedali farby a čierne štvorce nesusedili vrcholom).

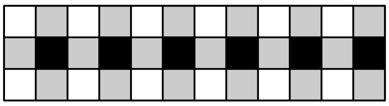


- Diskusia pre susediace čierne a sivé štvorce je obdobná.

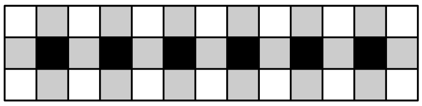
V každom riadku, príp. stĺpci, sa teda striedajú buď sivé a biele, alebo sivé a čierne štvorce. Tieto podmienky presne určujú vzor na obruse. Teraz si stačí predstaviť dostatočne veľkú oblasť s opísaným vzorom a vybrať z nej možné obrusy vyhovujúce posledným dvom podmienkam zo zadania. Také možnosti sú nasledujúce:



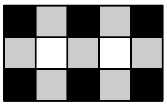
a) 11×3



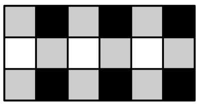
b) 12×3



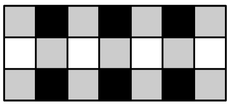
c) 13×3



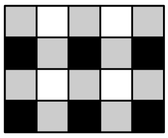
d) 5×3



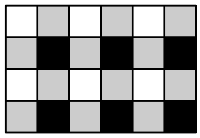
e) 6×3



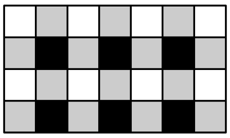
f) 7×3



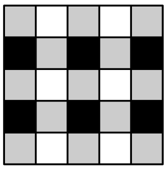
g) 5×4



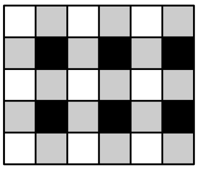
h) 6×4



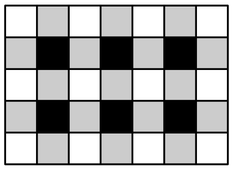
i) 7×4



j) 5×5



k) 6×5



l) 7×5

Obrus j) je štvorcový, všetky ostatné sú obdĺžnikové, teda vyhovujúce všetkým podmienkam úlohy.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019