2010/2011
60. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 13. – 19. 4. 2011.*)

1. Nájdite všetky konečné množiny S bodov v rovine s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé tri body A, B, C z množiny S existuje bod D z množiny S taký, že body A, B, C, D sú vrcholmi rovnobežníka.

2. a) Dokážte, že množinu celých čísel vieme rozložiť na dve disjunktné podmnožiny A a B tak, že každý prvok z A sa dá vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z B a každý prvok z B sa dá vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z A.
b) Rozhodnite, či je možné rozložiť množinu celých čísel na 2011 po dvoch disjunktných podmnožín $A_1, A_2, \dots, A_{2011}$ s nasledujúcou vlastnosťou: ak $i, j \in \{1, 2, \dots, 2011\}$ a $i \neq j$, tak každý prvok množiny A_i vieme vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z množiny A_j.

3. Daný je ostrouhlý rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Pre bod P ležiaci vnútri trojuholníka ABC označíme postupne M a N priesečníky kružnice so stredom A a polomerom $|AP|$ so stranami AB a AC. Nájdite bod P, pre ktorý je súčet $|MN| + |BP| + |CP|$ minimálny.

4. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Polpriamky CB a DA sa pretínajú v bode P, polpriamky AB a DC sa pretínajú v bode Q. Stredy uhlopriečok AC a BD označíme L a M (v tomto poradí). Nakoniec K nech je ortocentrum trojuholníka MPQ. Dokážte, že body P, Q, K, L ležia na kružnici.

5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré existuje n-tica rôznych prirodzených čísel $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ taká, že

$$\left(1 - \frac{1}{s_1}\right)\left(1 - \frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = \frac{42}{2010}.$$

6. Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všetkých kladných racionálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left((f(x))^2 \cdot y\right) = x^3 \cdot f(xy).$$

7. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, pričom $BC \parallel AE$, $|AB| = |BC| + |AE|$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDE|$. Nech M je stred úsečky CE a O je stred kružnice opísanej trojuholníku BCD. Dokážte, že ak $|\measuredangle DMO| = 90^\circ$, tak $2|\measuredangle BDA| = |\measuredangle CDE|$.

8. Nájdite všetky konečné rastúce aritmetické postupnosti prvočísel, v ktorých je počet členov väčší ako diferencia.

9. Dané je prirodzené číslo $n \geqq 2$. Štvorec je rozdelený na $n \times n$ štvorčekov. Dva protiľahlé rohové štvorčeky sú zafarbené na čierno. Operáciou nazveme prefarbenie všetkých štvorčekov jedného riadku alebo jedného stĺpca na „opačnú“ farbu. Koľko najmenej bielych štvorčekov musíme najprv zafarbiť na čierno, aby bolo potom možné týmito operáciami začierniť celý štvorec $n \times n$?

10. Nech H a O sú postupne ortocentrum a stred opísanej kružnice k trojuholníka ABC. Priamky AH a AO pretínajú kružnicu k postupne v bodoch M a N (rôznych od A). Označme P, Q, R postupne priesečníky priamok BC a HN, BC a OM, HQ a OP. Dokážte, že $AORH$ je rovnobežník.

11. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c spĺňajúce $1/a + 1/b + 1/c = 1$ platí nerovnosť
$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geqq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

12. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a nech D, E a F sú postupne päty výšok na strany BC, AC a AB. Nech P je priesečník kružnice opísanej trojuholníku ABC a priamky EF. Priamky BP a DF sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že $|AP| = |AQ|$.

13. V senáte je 51 senátorov. Senátorov potrebujeme rozdeliť do n výborov. Každý senátor neznáša práve troch iných senátorov. Ak senátor A neznáša senátora B, neznamená to nevyhnutne, že aj senátor B neznáša senátora A. Nájdite najmenšie n, pre ktoré je vždy možné rozdeliť senátorov do výborov tak, že všetci senátori v jednom výbore sa navzájom znášajú.

14. Nájdite všetky reálne funkcie f také, že pre všetky reálne čísla x, y platí rovnosť
$$f(x^2 + xy + f(y)) = f^2(x) + xf(y) + y.$$

15. Nech m a n sú prirodzené čísla a nech d je ich najväčší spoločný deliteľ. Ďalej nech $x = 2^m - 1$ a $y = 2^n + 1$.

a) Ak m/d je nepárne, dokážte, že najväčší spoločný deliteľ x a y je 1.

b) Ak m/d je párne, nájdite najväčší spoločný deliteľ x a y.

16. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, v ktorom $|DC| = |DE|$ a $|\measuredangle DCB| = |\measuredangle DEA| = 90°$. Nech F je bod vo vnútri strany AB, pre ktorý platí $|AF| : |BF| = |AE| : |BC|$. Dokážte, že $|\measuredangle FCE| = |\measuredangle ADE|$ a $|\measuredangle FEC| = |\measuredangle BDC|$.

17. Určte najmenšie prirodzené číslo n také, že existujú celé čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pre ktoré platí
$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 2002^{2011}.$$

18. V škatuli sú jednofarebné gule n rôznych veľkostí a n rôznych farieb. Viete, že ak v škatuli nie je guľa farby F a veľkosti V, potom celkový počet gúľ v škatuli, ktoré majú veľkosť V alebo farbu F, je aspoň n. Dokážte, že v škatuli je aspoň $n^2/2$ gúľ. Môže byť ich počet presne $n^2/2$?