61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$y + 3x = 4x^3,$$
$$x + 3y = 4y^3.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 4(x+y) &= 4(x^3+y^3), \\ (x+y) &= (x+y)(x^2-xy+y^2), \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} 2(x-y) &= 4(x^3-y^3), \\ \frac{1}{2}(x-y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Ak $x + y = 0$, tak dosadením $y = -x$ napríklad do prvej rovnice pôvodnej sústavy dostaneme $2x = 4x^3$, teda po úprave $x(2x^2 - 1) = 0$. Riešením tejto rovnice sú zrejme hodnoty $x = 0$ a $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, máme tak prvé tri riešenia sústavy: usporiadané dvojice $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ a $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Ak $x - y = 0$, tak dosadením $y = x$ do prvej rovnice dostaneme $4x = 4x^3$, čiže $x(x^2 - 1) = 0$. Riešením tejto rovnice sú $x = 0$ a $x = \pm 1$. Pre $x = 0$ dostaneme už skôr objavené riešenie $(0, 0)$, pre $x = \pm 1$ máme ďalšie dve riešenia sústavy $(1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Ostáva rozobrať prípad, keď sú oba výrazy $x+y$, $x-y$ nenulové. Pri tejto podmienke môžeme rovnice odvodené na začiatku uvedenými výrazmi vydeliť a dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 - xy + y^2, \\ \frac{1}{2} &= x^2 + xy + y^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Z nej opäť sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc odvodíme $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ a $xy = -\frac{1}{4}$. Na základe toho máme

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

teda $x+y = \frac{1}{2}$ alebo $x+y = -\frac{1}{2}$. Hodnoty neznámych x, y vieme potom podľa Viètových vzťahov dostať riešením kvadratických rovníc

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0, \qquad \text{resp.} \qquad t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0.$$

Keďže ich koreňmi sú $t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, resp. $t_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, dostávame štyri riešenia (t_1, t_2), (t_2, t_1), (t_3, t_4), (t_4, t_3).

Záver. Sústava má spolu 9 rôznych riešení, sú nimi usporiadané dvojice

$$\begin{gathered} (0,0),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), (1,1),\ (-1,-1), \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \\ \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Z postupu vyplýva, že všetky spĺňajú pôvodnú sústavu, skúška teda (pri tomto postupe) nie je nutná.

Iné riešenie. Ak $|x| > 1$, tak z prvej rovnice vyplýva $|y| = |x|(4x^2 - 3) > |x| > 1$. Z druhej rovnice následne rovnako odvodíme $|x| > |y|$, čo je spor. Preto $-1 \leqq x \leqq 1$ a existuje t v intervale $\langle 0, \pi \rangle$ také, že $x = \cos t$. Dosadením do prvej rovnice dostaneme $y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$,[1] z druhej potom podobne $x = 4\cos^3 3t - 3\cos 3t = \cos 9t$. Preto musí platiť $\cos t = \cos 9t$, odkiaľ po úprave

$$\begin{aligned} \cos 9t - \cos t &= 0, \\ -2\sin\frac{9t+t}{2}\sin\frac{9t-t}{2} &= 0, \\ \sin 5t \sin 4t &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Preto $5t$ alebo $4t$ musí byť násobkom π. Spolu s podmienkou $0 \leqq t \leqq \pi$ dostávame riešenia tvaru $(\cos t, \cos 3t)$ pre

$$t \in \left\{0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{5}, \pi\right\}.$$

(Skúška ani v tomto prípade nie je nutná.)

Iné riešenie. Vyjadrením $y = 4x^3 - 3x$ z prvej rovnice a dosadením za y do druhej dostaneme po úprave

$$\begin{aligned} x + 3(4x^3 - 3x) &= 4(4x^3 - 3x)^3, \\ 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 8x &= 0, \\ x(32x^8 - 72x^6 + 54x^4 - 15x^2 + 1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Mnohočlen v zátvorke po substitúcii $x^2 = z$ prejde na mnohočlen štvrtého stupňa $32z^4 - 72z^3 + 54z^2 - 15z + 1$, ktorý môžeme rozložiť na súčin tak, že uhádneme jeho korene $z = 1$ a $z = \frac{1}{2}$ a následne ho vydelíme príslušnými koreňovými činiteľmi. Odvodená rovnica pre neznámu x tak prejde na tvar

$$2x(x^2 - 1)(x^2 - \tfrac{1}{2})(16x^4 - 12x^2 + 1) = 0.$$

Doriešením bikvadratickej rovnice $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ (napríklad substitúciou $x^2 = z$) už ľahko určíme všetky riešenia. Sú nimi

$$x \in \left\{0,\ \pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\sqrt{\tfrac{3}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{5}}\right\}$$

(treba sa presvedčiť, že výraz pod odmocninou je pre každú kombináciu znamienok kladný). Ku každej z uvedených deviatich hodnôt x už ľahko dopočítame riešenie tvaru $(x, 4x^3 - 3x)$, skúška opäť vzhľadom na postup nie je nutná.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov, a to aj v prípade že riešenia nie sú uvedené presne v tvare (3); stačí aj tvar ako pri druhom alebo treťom uvedenom postupe alebo akýkoľvek iný podobný zápis obsahujúci všetkých 9 riešení.

[1] Na odvodenie rovnosti $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ stačí použiť známy vzorec $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Pri postupe ako v prvom uvedenom riešení dajte po jednom bode za každý z rozkladov v (1) a po jednom bode za rozbor situácie $x+y=0$, resp. $x-y=0$, spolu však najviac 3 body. Štvrtý bod dajte za prepis na sústavu (2), piaty bod za určenie oboch hodnôt $x+y=\pm\frac{1}{2}$ a $xy=-\frac{1}{4}$ a šiesty bod za správne vyriešenie kvadratických rovníc.

Pri druhom postupe dajte 1 bod za dôkaz, že $-1 \leqq x \leqq 1$, ďalší bod dajte za substitúciu $x = \cos t$. Tretí bod je za odvodenie $y=\cos 3t$, štvrtý bod za rovnicu $\cos t=\cos 9t$ a posledné 2 body za jej kompletné vyriešenie v intervale $\langle 0,\pi\rangle$ (tieto 2 body možno rozdeliť, napr. za odvodenie (4) bez následného nájdenia riešení možno udeliť piaty bod).

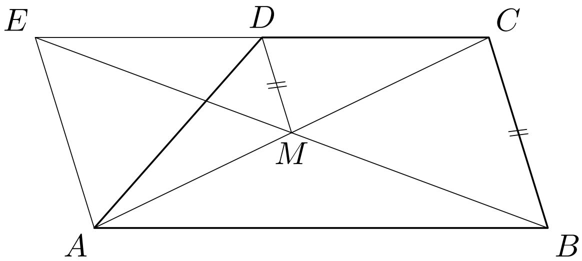
Pri treťom postupe len za vyjadrenie $y=4x^3-3x$ a dosadenie do druhej rovnice bez ďalšej úpravy nedávajte žiadny bod – prvý bod dajte až za bezchybnú úpravu na tvar (5). Po jednom bode dajte za vyňatie pred zátvorku každého z činiteľov x, (x^2-1), $(x^2-\frac{1}{2})$ (resp. za nájdenie príslušných koreňov a zníženie stupňa mnohočlena, ktorého korene hľadáme). Posledné dva body dajte za vyriešenie bikvadratickej rovnice.

Ak žiak (pri akomkoľvek správnom postupe) nenájde všetkých 9 riešení, dajte najviac 5 bodov. Toľko dajte aj v prípade, že žiak rieši sústavu dôsledkovými (neekvivalentnými) úpravami (t. j. z postupu jednoducho nevyplýva, že nájdené riešenia naozaj spĺňajú pôvodnú sústavu), nájde všetky riešenia, ale neurobí skúšku. (Bod za chýbajúcu skúšku strhnite iba v prípade, že inak je postup bezchybný.)

---

2. *V rovine uvažujme lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD a označme M stred jeho uhlopriečky AC. Dokážte, že ak majú trojuholníky ABM a ACD rovnaké obsahy, tak sú priamky DM a BC rovnobežné.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Úsečka BM je ťažnicou v trojuholníku ABC, delí ho teda na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Podľa zadania má jeden z týchto trojuholníkov rovnaký obsah ako trojuholník ACD. Preto má trojuholník ABC dvakrát väčší obsah ako trojuholník ACD. Tieto trojuholníky majú pritom zhodné výšky na strany AB, CD (ktoré sa zhodujú s výškou uvažovaného lichobežníka). Vzhľadom na ich obsahy teda platí $|AB|=2|CD|$.



Obr. 1

Na priamke CD uvažujme taký bod E, že D je stredom úsečky CE (obr. 1). Z odvodenej rovnosti $|AB|=2|CD|$ vyplýva zhodnosť úsečiek CE a AB. Štvoruholník $ABCE$ je preto rovnobežník a bod M (ako stred jeho uhlopriečky AC) je súčasne stredom jeho uhlopriečky BE. Úsečka DM je teda strednou priečkou v trojuholníku BCE, čiže je rovnobežná s jeho stranou BC, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Dôkaz rovnobežnosti priamok DM a BC možno podobne urobiť s využitím stredu F základne AB uvažovaného lichobežníka $ABCD$ (čím vznikne rovnobežník $AFCD$). Iným možným postupom je zostrojiť priesečník G priamok AD a BC a využiť vlastnosti stredných priečok v trojuholníkoch ABG a CGA.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 1 bod za pozorovanie, že trojuholník ABC má oproti trojuholníku ACD dvojnásobný obsah, ďalšie 2 body za odvodenie rovnosti $|AB|=2|CD|$ (alebo rovnosti $|AF|=|CD|$ vyplývajúcej z toho, že trojuholníky AFM a CDM majú zhodné výšky z vrcholu M), 1 bod za objav rovnobežníka $ABCE$ (alebo rovnobežníka $AFCD$) a posledné 2 body za dôkaz rovnobežnosti DM, BC.

3. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je súčin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ deliteľný číslom 5^n.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Skúmajme pre ktoré hodnoty n sú jednotlivé činitele zadaného súčinu deliteľné piatimi. Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení piatimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	...
zvyšok po delení 5	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$3^n + 2$	5	11	29	83	245	731	2 189	6 563	...
zvyšok po delení 5	0	1	4	3	0	1	4	3	...

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa $2^n + 1$ po delení piatimi je tvorená štvoricou 3, 0, 4, 2, ktorá sa periodicky opakuje. Dokázať to môžeme napríklad tak, že ukážeme, že čísla $2^n + 1$ a $2^{n+4} + 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení piatimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný piatimi:

$$(2^{n+4} + 1) - (2^n + 1) = 2^{n+4} - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2^n.$$

Podobne postupnosť zvyškov činiteľa $3^n + 2$ po delení piatimi tvorí periodicky sa opakujúca štvorica 0, 1, 4, 3, lebo rozdiel

$$(3^{n+4} + 2) - (3^n + 2) = 3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 5 \cdot 16 \cdot 3^n$$

je pre každé prirodzené n deliteľný piatimi.

Z uvedeného vyplýva, že $2^n + 1$ je deliteľné piatimi len pre $n = 2, 6, 10, \ldots$, zatiaľ čo $3^n + 2$ je deliteľné piatimi len pre $n = 1, 5, 9, \ldots$, čiže pre žiadne n nie sú piatimi deliteľné oba činitele zadaného súčinu. Aby bol teda súčin deliteľný číslom 5^n, musí ním byť deliteľný jeden z činiteľov. Avšak pre každé $n \geqq 2$ je zrejme $5^n > 3^n + 2$ a tiež $5^n > 2^n + 1$, takže 5^n nemôže deliť ani jedného z činiteľov. Jedine pre $n = 1$ máme $5^1 = 3^1 + 2$. Preto jediné vyhovujúce číslo je $n = 1$.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov. Po jednom bode (spolu dva body) dajte za objav postupností zvyškov po delení piatimi pre každý činiteľ (body udeľte aj v prípade, že riešiteľ len bez dôkazu prehlási, že postupnosti sú periodické, nakoľko táto skutočnosť je dostatočne evidentná a známa), resp. za akékoľvek správne zdôvodnenie, že $5 \mid 2^n + 1$ len pre n tvaru $4k + 2$ a $5 \mid 3^n + 2$ len pre n tvaru $4k + 1$. Ďalšie dva body dajte za úvahu, že 5^n musí deliť jedného činiteľa; piaty bod dajte za zdôvodnenie, že pre $n \geqq 2$ to nie je možné (pritom zrejmé nerovnosti $5^n > 3^n + 2$ a $5^n > 2^n + 1$ nie je nutné zdôvodňovať); posledný bod za uvedenie správnej odpovede $n = 1$. Žiak, ktorý bez akéhokoľvek zdôvodnenia iba prehlási, že jediné vyhovujúce je $n = 1$, dostane 1 bod. Ak žiak považuje za prirodzené číslo aj $n = 0$ a uvedie ho tiež v odpovedi, body nestŕhajte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Pavel Calábek, 2. Jaroslav Švrček, 3. Ján Mazák

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011