2008/2009
58. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 29. 3. – 4. 4. 2009.*)

1. Nech $S \subset \mathbb{R}$ je podmnožina množiny reálnych čísel. Hovoríme, že dvojica funkcií $f\colon S \to S$, $g\colon S \to S$ tvorí *brémsku dvojicu* na S, ak sú splnené nasledovné podmienky:
 (i) Obe funkcie sú rýdzo rastúce, teda $f(x) < f(y)$ a $g(x) < g(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in S$ spĺňajúce $x < y$.
 (ii) Pre každé $x \in S$ platí $f(g(g(x))) < g(f(x))$.
Rozhodnite, či existuje brémska dvojica
 a) na množine $S = \mathbb{N}$, t. j. na množine prirodzených čísel;
 b) na množine $S = \{a - 1/b;\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

2. Pre každé prirodzené číslo n určte počet takých permutácií $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, že
$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \quad \text{pre všetky } k = 1, 2, \dots, n.$$

3. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník a P, Q sú body v jeho vnútri, pričom štvoruholníky $PQDA$ a $QPBC$ sú tetivové. Na úsečke PQ leží taký bod E, že
$$|\measuredangle PAE| = |\measuredangle QDE| \quad \text{a} \quad |\measuredangle PBE| = |\measuredangle QCE|.$$
Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

4. Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n \geqq 0}$ spĺňa nasledovnú podmienku:
$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \quad \text{pre všetky } m \geqq n \geqq 0.$$
Vypočítajte hodnotu a_{2009} za podmienky, že $a_1 = 1$.

5. Na niektorých políčkach štvorčekovej mriežky 2009×2009 je položený kamienok (na každom políčku najviac jeden). Pre každé prázdne políčko mriežky nachádzajúce sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci platí, že súčet počtu kamienkov v i-tom riadku a počtu kamienkov v j-tom stĺpci je aspoň 2009. Nájdite najmenší počet kamienkov, ktoré tam musia byť položené.

6. Kružnice k_1 a k_2 sa dotýkajú zvonka v bode K. Navyše sa dotýkajú zvnútra kružnice m v bode A_1, resp. A_2. Nech P je jeden z priesečníkov kružnice m so spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2 prechádzajúcou bodom K. Priamka PA_1 pretína k_1 druhýkrát v bode B_1, podobne PA_2 pretína k_2 druhýkrát v bode B_2. Dokážte, že B_1B_2 je spoločná dotyčnica kružníc k_1 a k_2.

7. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že ich prvočíselný rozklad obsahuje iba čísla 2 a 5 (nie nutne obe), pričom $n + 25$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.

8. Na štvorčekovom papieri s dĺžkou strany štvorčeka 1 uvažujme množinu S všetkých mrežových bodov. Pre prirodzené číslo k nazveme dvojicu rôznych bodov k-priateľskou, ak existuje bod C z S taký, že obsah trojuholníka ABC je rovný k. Podmnožinu T množiny S nazveme k-banda, ak každá dvojica bodov v T je k-priateľskou. Nájdi najmenšie celé kladné číslo k, pre ktoré existuje k-banda s viac ako 200 prvkami.

9. Je daný lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AB a CD. Predpokladajme existenciu bodu E na priamke BC mimo úsečky BC a bodu F vnútri úsečky AD takých, že veľkosti uhlov DAE a CBF sú rovnaké. Označme I priesečník CD a EF a J priesečník AB a EF. Nech K je stredom úsečky EF, pričom neleží na priamke AB. Dokážte, že I patrí kružnici opísanej trojuholníku ABK práve vtedy, keď K patrí kružnici opísanej trojuholníku CDJ.

10. Nech k a n sú nezáporné celé čísla, pričom k je menšie ako $n-1$. Uvažujme množinu $\mathcal{L}$ obsahujúcu n priamok v rovine takú, že žiadna dvojica nie je rovnobežná a žiadna trojica sa nepretína v jednom bode. Označme $\mathcal{I}$ množinu priesečníkov priamok z $\mathcal{L}$. Nech O je bod v rovine neležiaci na žiadnej priamke z $\mathcal{L}$. Bod X z $\mathcal{I}$ je ofarbený na červeno, ak otvorená úsečka OX (bez koncových bodov) pretína najviac k priamok z $\mathcal{L}$. Dokážte, že $\mathcal{I}$ obsahuje najmenej $(k+1)(k+2)/2$ červených bodov.

11. Nech S_a, S_b, S_c sú stredy a R_a, R_b, R_c polomery kružníc pripísaných ku stranám BC, CA, AB trojuholníka ABC. Označme postupne r_a, r_b, r_c polomery kružníc vpísaných trojuholníkom BCS_a, ACS_b, ABS_c. Dokážte, že

$$\frac{r_a}{R_a} + \frac{r_b}{R_b} + \frac{r_c}{R_c} = 1.$$

12. Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky mnohočleny P stupňa menšieho ako n s celočíselnými koeficientmi spĺňajúce nasledujúcu podmienku: Existuje postupnosť celých čísel $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ takých, že

$$P(x_{k+1}) = P(x_k) + 7 \quad \text{pre } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

13. Čísla a, b, c sú dĺžkami strán daného trojuholníka. Dokážte, že

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqq \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}.$$

14. Dané je prirodzené číslo k. Určte najmenšiu hodnotu, akú môže nadobúdať ciferný súčet nejakého násobku čísla $10^k - 1$.

15. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník ABC s ramenami AB a AC. Bod M je stredom jeho základne BC. Zvoľme ľubovoľný bod X vo vnútri menšieho z oblúkov MA na kružnici opísanej trojuholníku ABM. Označme T taký bod vnútri ostrého uhla BMA, že $|\measuredangle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že rozdiel

$$|\measuredangle BTM| - |\measuredangle MTC|$$

nezávisí od voľby bodu X.

16. Nech pre nepárne celé čísla a, b, c, d platí $0 < a < b < c < d$ a $ad = cd$. Dokážte, že ak $a + d = 2m$ a $b + c = 2k$ pre nejaké prirodzené čísla m a k, potom $a = 1$.

17. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé dve reálne čísla x, y platí

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$