2011/2012
61. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 9. – 15. 7. 2012.*)

1. Daný je trojuholník ABC. Označme J stred kružnice pripísanej k strane BC. Táto kružnica sa dotýka strany BC v bode M a priamok AB, AC postupne v bodoch K, L. Priamky LM a BJ sa pretínajú v bode F, priamky KM a CJ v bode G. Nech S je priesečník priamok AF, BC a T priesečník priamok AG, BC. Dokážte, že M je stredom úsečky ST. (*Grécko*)

2. Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Nech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokážte, že
$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$
(*Austrália*)

3. Hru „Myslím si číslo" s povoleným klamaním hrajú dvaja hráči A a B. Pravidlá hry závisia od dvoch kladných celých čísel k a n, ktoré poznajú obaja hráči.

Na začiatku hry hráč A zvolí dve celé čísla x a N, pričom $1 \leqq x \leqq N$. Číslo x hráč A uchová v tajnosti a pravdivo prezradí hráčovi B číslo N. Hráč B sa potom pokúša zistiť informácie o čísle x kladením otázok hráčovi A nasledovným spôsobom: každá jeho otázka pozostáva z voľby ľubovoľnej množiny kladných celých čísel S (môže to byť aj rovnaká množina, akú použil v niektorej predošlej otázke) a opýtania sa hráča A, či číslo x patrí do S. Hráč B môže položiť toľko otázok, koľko len chce. Hráč A musí na každú z otázok hráča B okamžite odpovedať *áno* alebo *nie*, môže však klamať, koľko sa mu zachce. Jediným obmedzením je, že medzi každými $k+1$ po sebe idúcimi odpoveďami hráča A musí byť aspoň jedna odpoveď pravdivá.

Potom, ako hráč B položí toľko otázok, koľko chce, určí množinu X obsahujúcu nanajvýš n kladných celých čísel. Ak x patrí do X, hráč B vyhral; inak prehral. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $n \geqq 2^k$, tak hráč B má víťaznú stratégiu.
2. Pre každé dostatočne veľké číslo k existuje celé číslo $n \geqq 1{,}99^k$ také, že B nemá víťaznú stratégiu.

(*Kanada*)

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla a, b, c spĺňajúce $a+b+c=0$ platí
$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$
(*Južná Afrika*)

5. V danom pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C označme D pätu výšky z vrcholu C. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CD. Označme K taký bod na úsečke AX, že $|BK| = |BC|$. Podobne označme L taký bod na úsečke BX, že $|AL| = |AC|$. Priesečník priamok AL a BK označme M. Dokážte, že $|MK| = |ML|$.
(*Česká rep., Josef Tkadlec*)

6. Určte všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú nezáporné celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ také, že
$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$
(*Srbsko*)