2011/2012
61. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 6. – 12. 9. 2012.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ také, že rovnosť

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$. (Symbol $\mathbb{R}^+$ označuje množinu všetkých kladných reálnych čísel.) (*Chorvátsko*)

I-2. Dané je kladné celé číslo N. Množina $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ sa nazýva *prípustná*, ak neobsahuje také tri navzájom rôzne čísla a, b, c, že a delí b a súčasne b delí c. Určte najväčší možný počet prvkov, ktorý môže mať prípustná množina S. (*Maďarsko*)

I-3. Daný je lichobežník $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$ a priamka BD je osou uhla ADC. Priamka prechádzajúca bodom C rovnobežná s AD pretína úsečky BD a AB postupne v bodoch E a F. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku BEF. Predpokladajme, že $|\measuredangle ACO| = 60°$. Dokážte, že

$$|CF| = |AF| + |FO|.$$

(*Chorvátsko*)

I-4. Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná vzťahmi $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1} \quad \text{pre všetky kladné celé čísla } n.$$

Určte všetky prvočísla p, pre ktoré existuje kladné celé číslo m také, že p je deliteľom $a_m - 1$. (*Švajčiarsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nájdite všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel také, že

$$2x^3 + 1 = 3zx,$$
$$2y^3 + 1 = 3xy,$$
$$2z^3 + 1 = 3yz.$$

(*Česká rep., Jaroslav Švrček*)

T-2. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geqq 3 + 4(a + b + c).$$

(*Nemecko*)

T-3. Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme slová dĺžky n zložené z písmen množiny $\{M, E, O\}$. Označme a počet tých slov, ktoré obsahujú párny počet (môže byť aj nulový) blokov ME a párny počet (môže byť aj nulový) blokov MO. Podobne označíme b počet tých slov, ktoré obsahujú nepárny počet blokov ME a nepárny počet blokov MO. Dokážte, že $a > b$. (*Poľsko*)

T-4. Nech $p > 2$ je prvočíslo. Pre ľubovoľnú permutáciu $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ množiny $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ označme $f(\pi)$ počet tých čísel spomedzi

$$\pi(1),\ \pi(1) + \pi(2),\ \ldots,\ \pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(p),$$

ktoré sú deliteľné číslom p. Určte priemernú hodnotu čísla $f(\pi)$, ak uvažujeme všetky permutácie π množiny S. (*Maďarsko*)

T-5. Nech K je stred strany AB daného trojuholníka ABC. Nech L a M sú také body ležiace postupne na stranách AC a BC, pre ktoré platí $|\measuredangle CLK| = |\measuredangle KMC|$. Dokážte, že kolmice na strany AB, AC a BC prechádzajúce postupne bodmi K, L a M sa pretínajú v jednom bode. (*Poľsko*)

T-6. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého žiadne dve strany nie sú rovnobežné, pričom $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA|$. Predpokladajme, že priesečníky dvojíc osí uhlov pri susedných vrcholoch štvoruholníka $ABCD$ tvoria štvoruholník $EFGH$. Nech K je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $EFGH$. Dokážte, že priesečník priamok AB a CD leží na kružnici opísanej trojuholníku BKD. (*Chorvátsko*)

T-7. Nájdite všetky trojice (x, y, z) celých kladných čísel také, že

$$\begin{aligned} x^y + y^x &= z^y, \\ x^y + 2012 &= y^{z+1}. \end{aligned}$$

(*Litva*)

T-8. Pre ľubovoľné celé kladné číslo n označme $d(n)$ počet kladných deliteľov čísla n. Zistite, či existujú celé kladné čísla a a b také, že $d(a) = d(b)$ a $d(a^2) = d(b^2)$, ale $d(a^3) \neq d(b^3)$. (*Česká rep., Michal Rolínek*)