Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
v Bratislave

dizertačná práca

jún 2008

Mgr. Peter Novotný

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

Niektoré vlastnosti vektorových fibrácií

dizertačná práca

Mgr. Peter Novotný

Vedný odbor: 11-16-9 Geometria a topológia
Školiteľ: prof. RNDr. Július Korbaš, PhD.

Bratislava, jún 2008

Čestné vyhlásenie:

Čestne vyhlasujem, že predkladanú prácu som vypracoval samostatne pod odborným vedením školiteľa len s použitím uvedenej literatúry.

. . . .

Peter Novotný

Poďakovanie

V prvom rade sa chcem poďakovať môjmu školiteľovi prof. RNDr. Júliusovi Korbašovi, PhD. za predloženie zaujímavých problémov, za poskytnutie cenných rád pri ich riešení a za starostlivú pomoc pri úprave mojich prác. Ďakujem tiež všetkým spolupracovníkom z oddelenia, ktorí vytvárali príjemné a družné pracovné prostredie. Napokon, významná vďaka patrí aj mojej rodine a priateľke za ich neustálu podporu.

Abstrakt

Novotný Peter. Niektoré vlastnosti vektorových fibrácií. [dizertačná práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Školiteľ: prof. RNDr. Július Korbaš, PhD. Komisia pre obhajoby: 11-16-9 Geometria a topológia. Stupeň odbornej kvalifikácie: doktor filozofie (PhD.). Bratislava, FMFI UK, jún 2008, 90 s.

V práci sa zameriavame na skúmanie niektorých vlastností vektorových fibrácií, zaoberáme sa najmä dotykovými a normálovými fibráciami variet. Predmetom nášho záujmu sú hlavne dva systémy variet.

Prvým je systém Doldových variet $P(m,n) = (S^m \times \mathbb{C}P^n)/\sim$ (kde $(x,z) \sim (-x,\bar{z})$). Pripomíname známe výsledky o ich vnáraní a vkladaní do euklidovských priestorov a porovnávame ich s výsledkom, ktorý sa dá získať výpočtom duálnych Stiefelových-Whitneyho tried. Venujeme sa problému vektorových polí na Doldových varietách a prezentujeme viaceré nové výsledky, vrátane úplného riešenia problému vektorových polí pre niektoré systémy Doldových variet.

Druhým skúmaným systémom variet sú Grassmannove variety $G_{n,k} = O(n)/O(k) \times \times O(n-k)$. Nadväzujeme na doteraz známe výsledky a pre $G_{2^s+2,4}$ a $G_{2^s+3,4}$ odvodzujeme nenulovosť určitých duálnych Stiefelových-Whitneyho tried. Z toho vyplývajú napríklad dôsledky pre problém vnorenia a vloženia Grassmannových variet.

Kľúčové slová: vektorová fibrácia, rozpon, stabilný rozpon, vnorenie, Stiefelova-Whitneyho trieda, Doldova varieta, Grassmannova varieta.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

– náčrt histórie a súčasného stavu riešených problémov, cieľa dizertácie, použitých metód a dosiahnutých výsledkov

História

Jedným z odvetví topológie je diferenciálna topológia, ktorá sa zaoberá vlastnosťami hladkých variet a zobrazení medzi nimi. Pri viacerých otázkach v tejto disciplíne hrá dôležitú úlohu pojem vektorovej fibrácie. Špeciálnym prípadom vektorových fibrácií sú napríklad dotyková a normálová fibrácia hladkej variety. Slovo „varieta“ budeme v ďalšom texte používať ako synonymum súvislej hladkej kompaktnej variety bez okraja (takejto variete sa zvyčajne hovorí uzavretá varieta).

Dotyková fibrácia súvisí so skúmaním vektorových polí na varietách. Jednou zo základných otázok je, aký je maximálny počet (pre danú varietu) všade lineárne nezávislých vektorových polí. V literatúre je táto otázka známa ako *problém vektorových polí*.

Normálovú fibráciu možno priradiť k variete, ak je vnorená do euklidovského priestoru. Hrá významnú rolu pri otázke, aká je minimálna dimenzia euklidovského priestoru, do ktorého možno danú varietu vnoriť, prípadne vložiť. Táto otázka je známa ako *problém vnorenia a vloženia*.

Doteraz známe výsledky pri oboch spomenutých problémoch a aj pri mnohých ďalších, v ktorých vystupujú vektorové fibrácie, boli často dosiahnuté prostriedkami algebraickej topológie. Vektorové fibrácie tak tvoria jedno z prepojení medzi algebraickou a diferenciálnou topológiou.

Problém vektorových polí, hoci má prirodzenú geometrickú interpretáciu, nie je jednoduché vyriešiť. Pre existenciu *jedného* všade nenulového vektorového poľa existuje celkom uspokojivé kritérium (poz. vetu 1.3.4). Avšak otázka existencie dvoch, prípadne viacerých, všade lineárne nezávislých vektorových polí je pre mnohé variety otvorená.

História problému vektorových polí siaha do konca 19. storočia, teda do počiatkov samotnej algebraickej topológie, ktorej základy položil H. Poincaré v [48]. Práve Poincaré sa už v skoršej práci venoval vektorovým poliam na plochách a ukázal, že na dvojrozmernej sfére S^2 (pre $n \geq 0$ máme n-rozmernú sféru $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = = 1\}$) neexistuje všade nenulové vektorové pole. Ukázal tiež, že jediná uzavretá plocha v $\mathbb{R}^3$, na ktorej všade nenulové vektorové pole existuje, je torus.

Na začiatku 20. storočia nadviazal na Poincarého výsledky L. E. J. Brouwer [9], keď rozšíril tvrdenie na viacrozmerné sféry – dokázal, že na sférach s párnou dimenziou neexistuje všade nenulové vektorové pole. V tom istom období J. Hadamard [12] sformuloval hypotézu zovšeobecňujúcu Poincarého tvrdenia pre kompaktné viacrozmerné variety vnorené do euklidovského priestoru. Kompletný dôkaz vety charakterizujúcej variety, na ktorých existuje všade nenulové vektorové pole, podal v dvadsiatych rokoch 20. storočia H. Hopf [17]. Tým bola otázka pre *jedno* vektorové pole vyriešená.

Prirodzene tak vyvstala úloha určiť pre danú n-rozmernú varietu jej rozpon, teda maximálny možný počet nezávislých vektorových polí. Už pred tým, ako Hopf publikoval spomenutý všeobecný výsledok, bol vďaka A. Hurwitzovi [19] a J. Radonovi [50] známy čiastočný poznatok pre sféry. Z ich prác zo začiatku dvadsiatych rokov minulého storočia vyplývalo, že na sfére S^{n-1} existuje aspoň $\varrho(n) - 1$ všade lineárne nezávislých vektorových polí, pričom $\varrho(n)$ označuje tzv. *Hurwitzovo-Radonovo číslo* (poz. definíciu 1.3.10). Až o 40 rokov neskôr sa problém pre sféry podarilo úplne vyriešiť. Najskôr M. Kervaire [23] a J. Milnor [41] ukázali, že jediné paralelizovateľné sféry S^n, teda také, na ktorých existuje n všade lineárne nezávislých vektorových polí (t. j. maximálny možný počet, keďže ich nemôže byť viac ako dimenzia variety), sú S^1, S^3 a S^7. Napokon J. F. Adams [1] dokázal, že maximálny počet pre sféru S^{n-1} je $\varrho(n) - 1$, čiže dolný odhad pochádzajúci od Hurwitza a Radona je v skutočnosti hľadané maximum.

Popri štúdiu sfér nastal určitý posun v poznaní aj pre všeobecné variety. V šesťdesiatych rokoch 20. storočia sa objavili viaceré čiastočné výsledky, najmä nutné a postačujúce podmienky pre existenciu dvoch všade lineárne nezávislých vektorových polí na orientovateľných varietách (poz. napr. E. Thomas [70]) a neskôr tiež tvrdenia o existencii troch či štyroch nezávislých vektorových polí tak na orientovateľných, ako aj na neorientovateľných varietách. Taktiež bol problém do značnej miery vyriešený pre variety s malou dimenziou (poz. E. Thomas [69]).

Vzhľadom na náročnosť odvodzovania kritérií pre existenciu väčšieho počtu nezávislých vektorových polí na všeobecných varietách sa v neskorších rokoch až po súčasnosť začali objavovať častejšie výsledky pre konkrétne systémy variet (podobné výsledkom pre sféry). Máme tak k dispozícii určité informácie napríklad o rozpone alebo aspoň o paralelizovateľnosti (prípadne o stabilnom rozpone alebo stabilnej paralelizovateľnosti, poz. podkapitolu 1.4) vlajkových a orientovaných vlajkových variet (I. Miatello, R. Miatello [39], Korbaš [29], Sankaran, Zvengrowski [55], [56], [57], Korbaš, Zvengrowski [27]), Grassmannových a orientovaných Grassmannových variet (Yoshida [75], Leite, I. Miatello [36], Trew, Zvengrowski [72], Sankaran [58], Korbaš, Zvengrowski [27], [28]), projektívnych Stiefelových variet (Lam [35], Korbaš, Zvengrowski [27], [28]), či rôznych typov homogénnych priestorov (Singhof [61], Singhof, Wemmer [59], [60]). V kapitole 2 uvádzame svoje nové výsledky o rozpone Doldových variet, ktoré publikujeme v práci [45].

Problém vnorenia a vloženia má takisto dlhú históriu, ktorá má počiatok už v 19. storočí v riemannovskej geometrii. Zo štyridsiatych rokov 20. storočia medzi klasické výsledky patrí veta H. Whitneyho z [74], podľa ktorej možno každú hladkú n-rozmernú varietu vložiť do $\mathbb{R}^{2n}$ a (ak $n \geq 2$) vnoriť do $\mathbb{R}^{2n-1}$. Neskôr tento výsledok zlepšil R. Cohen v [10], keď ukázal, že hladkú uzavretú varietu dimenzie n možno pre $n \geq 2$ vnoriť do $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ (pričom $\alpha(n)$ označuje počet jednotiek v binárnom zápise čísla n). Okrem tohto výsledku, ktorý sa už nedá zlepšiť (pre každé n existuje varieta dimenzie n, ktorá sa nedá vnoriť do $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)-1}$), sú známe viaceré nutné alebo postačujúce podmienky na to, aby sa varieta dala vnoriť alebo vložiť do $\mathbb{R}^{2n-k}$ pre rôzne hodnoty k (poz. napr. [32, 5.10]). Okrem toho existujú mnohé práce zaoberajúce sa problémom vnorenia a vloženia pre konkrétne triedy variet, podobne ako pri probléme vektorových polí.

Ciele a výsledky

Okrem dvoch klasických problémov, o ktorých sme zatiaľ hovorili, sa pri varietách a vektorových fibráciách nad varietami skúmajú mnohé ďalšie vlastnosti. Pritom jednotlivé vlastnosti spolu súvisia a odpoveď na jednu otázku dáva často významnú informáciu pre ďalšie oblasti výskumu. Spomeňme napríklad súvis medzi problémom vektorových polí, problémom vnorenia a *Ľusternikovou-Šnireľmanovou kategóriou* variety (poz. [26]), alebo medzi problémom vektorových polí a *záhybovými zobrazeniami* (poz. [53], [54], [2]). Zaujímavý je teda každý nový výsledok, či už všeobecný, alebo týkajúci sa konkrétnej triedy variet.

V práci sa zameriavame na skúmanie niektorých vlastností dvoch tried variet. Prvou je trieda Doldových variet $P(m, n)$ (poz. definíciu 2.1). V podkapitole 1.5 pripomíname známe výsledky o ich vnáraní a vkladaní do euklidovských priestorov a pre konkrétne hodnoty

m a n ich porovnávame s výsledkom, ktorý sa dá získať výpočtom duálnych Stiefelových-Whitneyho tried. V kapitole 2 sa venujeme problému vektorových polí na Doldových varietách a prezentujeme viaceré nové výsledky, vrátane úplného riešenia problému vektorových polí pre niektoré systémy Doldových variet. Tieto výsledky sú obsiahnuté v práci Novotný [45].

Druhou skúmanou triedou variet sú Grassmannove variety $G_{n,k} = O(n)/O(k) \times O(n-k)$. V kapitole 3 nadväzujeme na doteraz známe výsledky a pre $G_{2^s+2,4}$ a $G_{2^s+3,4}$ odvodzujeme nenulovosť istých duálnych Stiefelových-Whitneyho tried. Z toho vyplývajú dôsledky pre problém vnorenia a vloženia a taktiež pre existenciu $2t$-*regulárnych zobrazení* (poz. [13]). Tieto výsledky sú obsiahnuté v práci Korbaš, Novotný [25].

Použité metódy

Dôležitým nástrojom pri skúmaní vektorových fibrácií sú charakteristické kohomologické triedy. Pri reálnych vektorových fibráciách, ktoré sú hlavným predmetom nášho záujmu, sú to najmä Stiefelove-Whitneyho triedy, prípadne k nim inverzné (duálne) triedy. Mnohé nutné alebo postačujúce podmienky na existenciu istého počtu nezávislých vektorových polí alebo na existenciu vnorenia do daného euklidovského priestoru sú sformulované práve pomocou nich. Koncept charakteristických tried pochádza z tridsiatych rokov 20. storočia, keď ich nezávisle od seba zaviedli E. Stiefel a H. Whitney.

Pri odvodzovaní výsledkov sme často použili práve uvedené kohomologické triedy. Keďže Stiefelove-Whitneyho triedy vektorovej fibrácie nad bázovým priestorom M ležia v kohomologickom okruhu $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$, ktorý je pre obe skúmané triedy variet izomorfný s určitým faktorovým okruhom okruhu polynómov viacerých premenných, náročnosť aplikovania známych kritérií spočíva najmä v nie jednoduchom výpočte konkrétnych tried v tomto okruhu. Pri formulácii všeobecných hypotéz nám často pomohol výpočet pre konkrétne variety $P(m,n)$, resp. $G_{n,k}$, pri realizácii ktorého bola použitá výpočtová technika[1]. Pri výpočte duálnych Stiefelových-Whitneyho tried Grassmannových variet sme použili metódu R. Stonga, ktorú podrobnejšie opisujeme v kapitole 3.

Okrem toho sme na viacerých miestach použili známe výsledky týkajúce sa vlastností vektorových fibrácií, odvodené rôznymi autormi. Prevažná väčšina tvrdení, o ktoré sa opierame, je sformulovaná v kapitole 1, často s dôkazom alebo náznakom dôkazu. V tejto ka-

[1]Použitý bol napríklad systém počítačovej algebry SINGULAR, voľne dostupný na adrese `http://www.singular.uni-kl.de`.

pitole tiež uvádzame základné pojmy a tvrdenia týkajúce sa vektorových fibrácií, ktoré preberáme najmä z prác [20], [40] a [66].

Možnosti ďalšieho výskumu

V oboch hlavných témach, na ktoré sme sa sústredili, ostali viaceré otvorené problémy. Podrobnejšie o niektorých námetoch a hypotézach hovoríme v závere práce. Teraz len načrtneme niektoré otázky. Samozrejme, ako sme už uviedli, venovať sa možno aj mnohým otvoreným otázkam v súvisiacich oblastiach výskumu (Ľusternikova-Šnireľmanova kategória a pod.).

Pri Doldových varietách sme presný rozpon určili len pre niektoré prípady. I keď pomocou Stiefelových-Whitneyho tried už lepší výsledok ako ten, ktorý sme odvodili vo vete 2.1.9, dosiahnuť nemožno, dá sa rozpon skúmať aj inými postupmi, podobne ako v podkapitolách 2.2, 2.3.

Pre Grassmannove variety $G_{2^s+2,4}$ a $G_{2^s+3,4}$ sme ukázali nenulovosť niektorých vysokých duálnych Stiefelových-Whitneyho tried, pričom na základe výpočtov máme hypotézu, že nájdené triedy sú najvyššie nenulové, t. j. všetky vyššie triedy sú nulové. Táto hypotéza môže byť ďalším predmetom nášho záujmu. Taktiež je pre mnohé prípady otvorená otázka, aké sú najvyššie nenulové duálne Stiefelove-triedy variety $G_{n,k}$ pre $k \geq 5$.

Kapitola 1

Niektoré základné pojmy a úvahy

Úvahy a dôkazy v tejto kapitole nie sú originálne; ak priamo neuvedieme iný zdroj, čerpáme z kníh [20], [40], [66].

Definícia 1.1. Trojica $\xi = (E, \pi, B)$ sa nazýva (*reálna*) *vektorová fibrácia*, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) E a B sú topologické priestory a $\pi \colon E \to B$ je spojité zobrazenie;

(ii) pre každý bod $b \in B$ je $\pi^{-1}(b)$ vektorový priestor nad $\mathbb{R}$;

(iii) (podmienka *lokálnej triviálnosti*) pre každý bod $b \in B$ existuje jeho okolie $U \subset B$ také, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje homeomorfizmus

$$h \colon U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

taký, že pre každé $b' \in U$ je zobrazenie určené predpisom $x \mapsto h(b', x)$ izomorfizmom medzi vektorovými priestormi $\mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(b')$.

Priestor E sa označuje $E(\xi)$ a nazýva sa *totálny priestor*, priestor $B = B(\xi)$ je *báza* fibrácie a zobrazenie $\pi = \pi_\xi$ sa nazýva *projekcia*. Dvojica (U, h), ktorá podľa podmienky (iii) existuje pre každý bod $b \in B$, sa nazýva *lokálny súradnicový systém fibrácie ξ v bode b*. Vektorový priestor $\pi^{-1}(b)$ sa nazýva *fíber* nad bodom b a označuje sa F_b alebo $F_b(\xi)$.

Poznámka a definícia 1.2. V určitých prípadoch je možné za okolie U v podmienke (iii) predošlej definície zvoliť celý priestor B. Z lokálnej triviálnosti sa tak stane „globálna“

a zobrazenie h bude homeomorfizmom medzi priestormi $B \times \mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(B) = E$. Takejto vektorovej fibrácii budeme hovoriť *triviálna*.

Poznámka 1.3. Dimenzia fíbra nad bodom b, t. j. hodnota n z podmienky (iii) definície 1.1, je zrejme lokálne konštantná funkcia z B do $\mathbb{N}_0$. Teda už súvislosť priestoru B zabezpečí, že dimenzia fíbra je konštantná na celom B. Ak je dimenzia fíbra konštantná, nazýva sa *dimenzia vektorovej fibrácie*.

Vektorová fibrácia je špeciálnym prípadom nasledujúceho všeobecnejšieho pojmu.

Definícia 1.4. Štvorica (E, π, B, F) sa nazýva (*lokálne triviálna*) *fibrácia*, ak E, B, F sú topologické priestory, $\pi\colon E \to B$ je spojité surjektívne zobrazenie a pre každý bod $b \in B$ existuje jeho okolie $U \subset B$ a homeomorfizmus $h\colon U \times F \to \pi^{-1}(U)$ taký, že $\pi(h(b', x)) = b'$ pre každé $b' \in U$. Fibrácia (E, π, B, F) sa často znázorňuje diagramom

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

Podobným spôsobom ako v definíciách 1.1, resp. 1.4, možno zaviesť pojem *hladká vektorová fibrácia*, resp. *hladká fibrácia*. Stačí pridať požiadavky, že E, B a F sú hladké variety, π je hladké zobrazenie a h vystupujúce v podmienke lokálnej triviálnosti je difeomorfizmus. Medzi dvoma vektorovými fibráciami možno uvažovať zobrazenia v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 1.5. Nech $\xi = (E(\xi), \pi_\xi, B(\xi))$ a $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, B(\eta))$ sú vektorové fibrácie. Dvojica spojitých zobrazení $f\colon E(\xi) \to E(\eta)$, $\bar{f}\colon B(\xi) \to B(\eta)$, pričom diagram

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_\xi"] & E(\eta) \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ B(\xi) \arrow[r, "\bar{f}"] & B(\eta) \end{tikzcd}$$

komutuje a pre každé $b \in B(\xi)$ je zúženie f na fíber nad bodom b lineárnym zobrazením medzi $F_b(\xi)$ a $F_{\bar{f}(b)}(\eta)$, sa nazýva *morfizmus* z ξ do η; označíme $(f, \bar{f})\colon \xi \to \eta$ (prípadne len $f\colon \xi \to \eta$, keďže zobrazenie $\bar{f}$ je vďaka komutatívnosti diagramu jednoznačne určené zobrazením f). Ak je príslušné zobrazenie fíbrov lineárnym monomorfizmom, nazývame uvedený morfizmus *monomorfizmom* z ξ do η. Ak $B(\xi) = B(\eta)$ a $\bar{f}$ je identita, uvedený morfizmus (resp. monomorfizmus) nazývame *B-morfizmus* (resp. *B-monomorfizmus*) z ξ do η.

Vo viacerých situáciách sa stretneme s rôznymi vektorovými fibráciami nad tým istým bázovým priestorom. Pri ďalších úvahách preto pomôže, keď ich istým spôsobom roztriedime.

Definícia 1.6. Dve vektorové fibrácie ξ a η nad tým istým bázovým priestorom B sú navzájom *izomorfné* (ozn. $\xi \cong \eta$), ak existuje homeomorfizmus $f\colon E(\xi) \to E(\eta)$, ktorého zúženie na fíber nad každým bodom b je izomorfizmom vektorových priestorov $F_b(\xi)$ a $F_b(\eta)$. Izomorfné vektorové fibrácie budeme často považovať za totožné. Množinu tried rozkladu všetkých vektorových fibrácií nad B podľa relácie $\cong$ označujeme $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)$.

Uveďme teraz niekoľko príkladov vektorových fibrácií.

Príklad 1.7. Pre každú varietu M jej *dotyková fibrácia* τ_M je vektorovou fibráciou s bázovým priestorom M; jej dimenzia sa rovná dimenzii variety M. Jej totálny priestor je dotyková varieta TM pozostávajúca z dvojíc (b, v), pričom $b \in M$ a v je dotykový vektor k M v bode b. Projekciou je zobrazenie definované predpisom $\pi(b, v) = b$. Fíbrom v bode b je dotykový priestor M_b (t. j. priestor dotykových vektorov k M v bode b). Poznamenajme, že τ_M je príkladom hladkej vektorovej fibrácie.

Príklad 1.8. Uvažujme ľubovoľné hladké vnorenie variety M do euklidovského priestoru $\mathbb{R}^n$, teda hladké zobrazenie $f\colon M \to \mathbb{R}^n$, ktorého diferenciál $df_x\colon M_x \to (\mathbb{R}^n)_x \cong \mathbb{R}^n$ je injektívne lineárne zobrazenie pre každý bod $x \in M$. Ako totálny priestor $E \subset M \times \mathbb{R}^n$ zoberme množinu takých dvojíc (b, v), v ktorých v je vektor kolmý na dotykový priestor M_b (poz. príklad 1.7). Projekciou bude $\pi(b, v) = b$. Fíbrom v bode b je teda ortogonálny doplnok priestoru M_b. Vektorová fibrácia $\nu = (E, \pi, M)$ sa nazýva *normálová fibrácia* daného vnorenia variety M do $\mathbb{R}^n$.

Príklad a definícia 1.9. Pre ľubovoľnú bázu B môžeme ako totálny priestor zvoliť $B \times \times \mathbb{R}^n$. Projekciou bude zobrazenie $\pi(b, x) = b$ a fíbrom v ľubovoľnom bode b bude množina $\{b\} \times \mathbb{R}^n$, ktorá má prirodzenú štruktúru vektorového priestoru. Dostaneme tak triviálnu vektorovú fibráciu, ktorú budeme označovať ε^n_B, alebo len ε^n, ak je bázový priestor zrejmý. Rozšírime pojem triviálnej vektorovej fibrácie: v súlade s definíciou 1.6, n-rozmerná vektorová fibrácia nad B sa nazýva triviálna, ak je izomorfná s ε^n_B.

Dotyková fibrácia τ_M je pre niektoré variety M triviálna. V takom prípade o variete M hovoríme, že je *paralelizovateľná*. To, či je daná varieta paralelizovateľná, úzko súvisí s problémom vektorových polí, ktorému sa budeme venovať neskôr.

Príklad 1.10. Stotožnením protiľahlých bodov sféry S^n získame *reálny projektívny priestor* $\mathbb{R}P^n$. Presnejšie,

$$\mathbb{R}P^n = \{\{\pm x\};\, x \in S^n\}\,,$$

pričom topológia na $\mathbb{R}P^n$ je faktorovou topológiou sféry S^n podľa relácie generovanej dvojicami $x \sim -x$. K bázovému priestoru $\mathbb{R}P^n$ priraďme ako totálny priestor podmnožinu $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ pozostávajúcu z takých dvojíc $(\{\pm x\}, v)$, že vektor v je násobkom x. Projekciou bude zobrazenie $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$. Teda každý fíber nad $\{\pm x\}$ je množina násobkov x, čo je vlastne priamka v $\mathbb{R}^{n+1}$ prechádzajúca cez x a $-x$ so zvyčajnou štruktúrou (jednorozmerného) vektorového priestoru. Overíme, že je splnená aj podmienka lokálnej triviálnosti. K ľubovoľnému bodu z $\mathbb{R}P^n$ zoberieme také „dostatočne malé“ okolie U, že jeho vzor U' v S^n neobsahuje žiadne dva protiľahlé body. Potom môžeme definovať homeomorfizmus $h\colon U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U)$ predpisom

$$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx) \qquad \text{pre všetky } (x,t) \in U' \times \mathbb{R}.$$

Dvojica (U, h) spĺňa všetky podmienky lokálneho súradnicového systému, teda dostávame jednorozmernú vektorovú fibráciu. Označíme ju γ_n^1; nazýva sa *kanonická jednorozmerná fibrácia nad* $\mathbb{R}P^n$. Neskôr rôznymi spôsobmi ukážeme, že pre $n \geq 1$ je netriviálna (poz. príklad 1.2.9 a dôsledok 1.3.3).

Niektoré úvahy o danej vektorovej fibrácii vyžadujú zavedenie orientácie. To pritom nie je vždy možné, napríklad vektorová fibrácia γ_n^1 sa nedá orientovať. (Vyplýva to napríklad z vety 1.2.10 a príkladu 1.2.9.)

Definícia 1.11. *Orientácia* vektorovej fibrácie ξ je zobrazenie, ktoré každému fíbru priraďuje orientáciu (v zmysle orientácie vektorového priestoru) a spĺňa podmienku „lokálnej kompatibility“: ku každému bodu $b_0 \in B(\xi)$ existuje jeho lokálny súradnicový systém (U, h) taký, že pre každý bod $b \in U$ príslušný izomorfizmus $x \mapsto h(b, x)$ z $\mathbb{R}^n$ na $F_b(\xi)$ zachováva orientáciu (pritom priestor $\mathbb{R}^n$ je štandardne orientovaný). Vektorová fibrácia, na ktorej sa dá zvoliť orientácia, sa nazýva *orientovateľná*. Varieta M je *orientovateľná*, ak je orientovateľná jej dotyková fibrácia τ_M.

1.1 Konštrukcie vektorových fibrácií

V doterajších príkladoch sme vždy začali s nejakým bázovým priestorom a k nemu sme následne priradili vektorovú fibráciu. Pri takto získaných fibráciách musíme vždy ukázať, že spĺňajú podmienky definície 1.1. Uveďme teraz niekoľko univerzálnych konštrukcií, ktorými možno vytvoriť nové vektorové fibrácie z pôvodných.

Definícia 1.1.1. Nech $\xi = (E, \pi, B)$ je vektorová fibrácia a $\bar{B}$ podmnožina B. Položme $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$. Nech $\bar{\pi}\colon \bar{E} \to \bar{B}$ je zúženie π na množinu $\bar{E}$. Potom trojica $(\bar{E}, \bar{\pi}, \bar{B})$ je vektorová fibrácia, ktorú označujeme $\xi_{|\bar{B}}$ a nazývame *zúženie* ξ *na* $\bar{B}$. Fíber $F_b(\xi_{|\bar{B}})$ je totožný s fíbrom $F_b(\xi)$.

Zúženie vektorovej fibrácie na podpriestor je špeciálny prípad nasledujúcej všeobecnejšej konštrukcie.

Definícia 1.1.2. Nech $\xi = (E, \pi, B)$ je vektorová fibrácia a B_1 ľubovoľný topologický priestor. Nech $f\colon B_1 \to B$ je ľubovoľné spojité zobrazenie. Označme $E_1 \subset B_1 \times E$ množinu tých dvojíc (b, e), pre ktoré $f(b) = \pi(e)$. Projekciu $\pi_1\colon E_1 \to B_1$ definujme predpisom $\pi_1(b, e) = b$. Vektorovú fibráciu $f^*\xi = (E_1, \pi_1, B_1)$ budeme nazývať *indukovaná fibrácia* (presnejšie: vektorová fibrácia indukovaná z fibrácie ξ zobrazením f).

To, že $f^*\xi$ je skutočne vektorová fibrácia, možno nahliadnuť z komutatívneho diagramu

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

v ktorom $\hat{f}(b, e) = e$. Na fíbri $F_b(f^*\xi)$ je štruktúra vektorového priestoru definovaná prirodzene tak, aby $\hat{f}$ zobrazovalo fíber $F_b(f^*\xi)$ izomorfne na fíber $F_{f(b)}(\xi)$. Lokálny súradnicový systém (U_1, h_1) v bode $b \in B_1$ získame z lokálneho súradnicového systému (U, h) v bode $f(b)$; stačí položiť $U_1 = f^{-1}(U)$ a definovať $h_1\colon U_1 \times R^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$ predpisom $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$. Všimnime si tiež, že ak ξ je triviálna vektorová fibrácia, tak je triviálna aj $f^*\xi$.

Keď v predošlej definícii zvolíme za f vloženie $i\colon \bar{B} \hookrightarrow B$, dostaneme vektorovú fibráciu $i^*\xi$, ktorá je izomorfná s $\xi_{|\bar{B}}$. Na dôležitosť indukovanej fibrácie upozorňuje ďalšia definícia a tvrdenie.

Definícia 1.1.3. Majme dve vektorové fibrácie η a ξ. Spojité zobrazenie $g\colon E(\eta) \to E(\xi)$, ktorého zúženie na každý fíber $F_b(\eta)$ je izomorfizmom medzi $F_b(\eta)$ a nejakým $F_{b'}(\xi)$, sa nazýva *fíbre zachovávajúce zobrazenie z η do ξ*. Zrejme príslušné zobrazenie $\bar{g}\colon B(\eta) \to$ $\to B(\xi)$ spĺňajúce $\bar{g}(b) = b'$ je tiež spojité.

Fíbre zachovávajúce zobrazenie je teda morfizmom z η do ξ v zmysle definície 1.5, ktorý je na každom fíbri izomorfizmom.

Veta 1.1.4. *Ak $g\colon E(\eta) \to E(\xi)$ je fíbre zachovávajúce zobrazenie a $\bar{g}\colon B(\eta) \to B(\xi)$ príslušné zobrazenie medzi bázovými priestormi, tak $\eta \cong \bar{g}^*\xi$.*

Dôkaz. Zoberme $h\colon E(\eta) \to E(\bar{g}^*\xi)$ určené predpisom $h(e) = (\pi_\eta(e), g(e))$. Zrejme h je fíbre zachovávajúce. Zostáva ukázať, že h^{-1} je spojité. Uvažujme ľubovoľný bod $h(e) =$ $= e' \in E(\bar{g}^*\xi)$. Z lokálnej triviálnosti oboch fibrácií máme okolie U bodu $\pi_{\bar{g}^*\xi}(e') = \pi_\eta(e)$ a homeomorfizmy f, f', ktoré spolu s h dávajú spojité zobrazenie

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f'} \pi_\eta^{-1}(U) \xrightarrow{h} \pi_{\bar{g}^*\xi}^{-1}(U) \xrightarrow{f^{-1}} U \times \mathbb{R}^n,$$

ktoré je na každom fíbri $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ izomorfizmom. Možno teda písať

$$f^{-1}(h(f'(b, x_1, \dots, x_n))) = (b, (x_1, \dots, x_n) \cdot A(b)),$$

pričom $A(b)$ je regulárna matica, ktorá je navyše spojito závislá od b. Potom zjavne

$$f'^{-1}(h^{-1}(f(b, x_1, \dots, x_n))) = (b, (x_1, \dots, x_n) \cdot A^{-1}(b)),$$

pričom závislosť inverznej matice $A^{-1}(b)$ od b je opäť spojitá. Takže zobrazenie $f'^{-1} \circ h^{-1} \circ f$ je spojité, a keďže f a f' sú homeomorfizmy, je h^{-1} spojité. $\square$

Pomocou indukovanej fibrácie možno vytvoriť aj „súčet“ dvoch vektorových fibrácií, ale najskôr si ukážeme jeho konštrukciu bez nej.

Definícia 1.1.5. Nech ξ a η sú vektorové fibrácie nad tým istým bázovým priestorom B. Ich *priamy súčet* $\xi \oplus \eta$ je vektorová fibrácia nad B s totálnym priestorom

$$E(\xi \oplus \eta) = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\eta);\ \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2)\}$$

a projekciou definovanou predpisom $\pi_{\xi\oplus\eta}(e_1, e_2) = \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2)$. Fíber nad bodom b je vektorový priestor $F_b(\xi \oplus \eta) \cong F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$. Tejto vektorovej fibrácii sa hovorí tiež *Whitneyho súčet* ξ a η. Označením $n\xi$ rozumieme n-násobný priamy súčet $\xi \oplus \cdots \oplus \xi$.

Rovnakú fibráciu ako v predošlej definícii dostaneme vytvorením indukovanej fibrácie $d^*(\xi \times \eta)$, kde $d\colon B \to B \times B$ je diagonálne zobrazenie určené predpisom $d(x) = (x, x)$ a $\xi \times \eta$ je fibrácia

$$(E(\xi) \times E(\xi), \pi_\xi \times \pi_\eta, B \times B).$$

Lokálna triviálnosť fibrácie $\xi \times \eta$ je zrejmá. Tým sme zároveň zdôvodnili lokálnu triviálnosť fibrácie $\xi \oplus \eta$.

Na množine všetkých vektorových fibrácií nad daným bázovým priestorom tak máme binárnu operáciu $\oplus$, ktorá na úrovni dimenzie korešponduje s klasickým sčítaním (t. j. dimenzia fibrácie $\xi \oplus \eta$ je súčtom dimenzií fibrácií ξ a η) a na úrovni fíbrov s priamym súčtom vektorových priestorov. Ak je bázový priestor B kompaktný, získa operácia $\oplus$ ďalšiu vlastnosť sformulovanú v nasledujúcom tvrdení.

Veta a definícia 1.1.6. *Ku každej vektorovej fibrácii ξ nad kompaktným priestorom B existuje taká vektorová fibrácia η nad B, že $\xi \oplus \eta$ je triviálna. Fibráciu η nazveme komplement alebo doplnok fibrácie ξ.*

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľnú vektorovú fibráciu ξ s dimenziou n a kompaktnou bázou B. Vďaka kompaktnosti možno spomedzi všetkých lokálnych súradnicových systémov (U, h) vybrať konečný systém $\{(U_i, h_i)\}_{i=1}^m$ taký, že $\{U_i\}_{i=1}^m$ je (otvorené) pokrytie priestoru B. Pre toto pokrytie zostrojíme podriadený rozklad jednotky, t. j. funkcie $\varphi_i\colon B \to \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, \dots, m$, také, že

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{pre každé } x \in B,$$

pričom uzáver množiny $\{x \in B;\ \varphi_i(x) \neq 0\}$ leží celý v U_i. Komplement η budeme hľadať tak, aby bolo $\xi \oplus \eta \cong \varepsilon_B^{nm}$. Vhodné bude, keď najskôr vložíme ξ do $B \times \mathbb{R}^{nm}$. Na to nám poslúži zobrazenie $H\colon E(\xi) \to B \times \mathbb{R}^{nm}$ definované predpisom

$$H(u) = (\pi_\xi(u), \varphi_1(\pi_\xi(u))v_1, \dots, \varphi_m(\pi_\xi(u))v_m)\,,$$

pričom v_i je vektor z $\mathbb{R}^n$, pre ktorý platí $h_i(\pi_\xi(u), v_i) = u$, ak $\pi_\xi(u) \in U_i$, resp. $v_i = \vec{0}$, ak $\pi_\xi(u) \notin U_i$ (v druhom prípade je voľba v_i nepodstatná, keďže vtedy $\varphi_i(\pi_\xi(u)) = 0$).

Zobrazenie H zobrazuje fíbre na fíbre, a keďže h_i je lokálny súradnicový systém, priradenie $u \mapsto v_i$ je na každom fíbri lineárny izomorfizmus. Keď teda zúžime H na fíber nad daným bodom b, dostaneme monomorfizmus $F_b(\xi) \to F_b(\varepsilon_B^{nm})$. Zostrojme teraz totálny priestor

$$E(\eta) = \left\{(b, v) \in B \times \mathbb{R}^{nm};\ v \perp H\left(\pi_\xi^{-1}(b)\right)\right\}$$

(kolmosť berieme vzhľadom na štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^{nm}$). Ľahko možno nahliadnuť, že pre $\pi_\eta\colon E(\eta) \to B$ spĺňajúce $\pi_\eta(b, v) = b$ je $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, B)$ vektorová fibrácia a že $\xi \oplus \eta \cong B \times \mathbb{R}^{nm}$. □

Príklad 1.1.7. Uvažujme ľubovoľné vnorenie variety M do euklidovského priestoru $\mathbb{R}^n$. Potom normálová fibrácia ν z príkladu 1.8 je komplement dotykovej fibrácie τ_M z príkladu 1.7, lebo $\tau_M \oplus \nu \cong \varepsilon^n$.

Existencia komplementu umožňuje na množine $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)$ zaviesť reláciu ekvivalencie, pričom triedy ekvivalencie budú tvoriť grupu.

Definícia 1.1.8. Nech B je kompaktný priestor. Hovoríme, že vektorové fibrácie ξ a η nad B sú *stabilne ekvivalentné*, ozn. $\xi \sim_s \eta$, ak pre nejaké m, n platí $\xi \oplus \varepsilon^m \cong \eta \oplus \varepsilon^n$.

Samozrejme, stabilná ekvivalencia je reláciou ekvivalencie a je kompatibilná s binárnou operáciou $\oplus$, t. j. ak $\xi \sim_s \xi'$ a $\eta \sim_s \eta'$, tak $(\xi \oplus \eta) \sim_s (\xi' \oplus \eta')$. Na množine tried rozkladu $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)$ podľa relácie $\sim_s$, ktorú označujeme $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(B)$, tak máme prirodzene definovanú binárnu operáciu $\oplus$ (ktorá je zrejme, rovnako ako na množine $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)$, asociatívna aj komutatívna). Očividne tiež $\varepsilon^m \sim_s \varepsilon^n$ pre ľubovoľné m, n a $(\xi \oplus \varepsilon^n) \sim_s \xi$. Trieda triviálnych vektorových fibrácií je preto neutrálnym prvkom pre binárnu operáciu $\oplus$ na množine $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(B)$. Napokon, z 1.1.6 vyplýva existencia inverzného prvku ku každej triede v $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(B)$, takže $(\tilde{K}_{\mathbb{R}}(B), \oplus)$ je grupa. Ak sa nám teda v nejakej situácii pre vektorové fibrácie ξ, η, ψ podarí odvodiť, že $(\xi \oplus \psi) \sim_s (\eta \oplus \psi)$, vyplýva odtiaľ aj $\xi \sim_s \eta$. Za určitých okolností možno rovnaké triedy takýmto spôsobom „odčítať“ nie len v $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(B)$, ale aj priamo vo $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)$. Pomôže nám pri tom nasledujúca veta, ktorej všeobecnejšie znenie možno nájsť napríklad v [20, 8(1.5)].

Veta 1.1.9. *Nech ξ a η sú k-rozmerné vektorové fibrácie nad varietou M dimenzie n. Ak $k \geq n + 1$ a $\xi \oplus \varepsilon^m \cong \eta \oplus \varepsilon^m$ pre nejaké m, tak $\xi \cong \eta$.*

Dôkaz. Stačí tvrdenie dokázať pre $m = 1$. Opakovaným použitím tohto špeciálneho prípadu totiž dostaneme

$$\xi \oplus \varepsilon^m \cong \eta \oplus \varepsilon^m \implies \xi \oplus \varepsilon^{m-1} \cong \eta \oplus \varepsilon^{m-1} \implies \cdots \implies \xi \oplus \varepsilon^1 \cong \eta \oplus \varepsilon^1 \implies \xi \cong \eta.$$

Nech teda $\psi := \xi \oplus \varepsilon^1 \cong \eta \oplus \varepsilon^1$. Uvažujme zrejmé M-monomorfizmy $u\colon \varepsilon^1 \to \psi \cong \xi \oplus \varepsilon^1$, $v\colon \varepsilon^1 \to \psi \cong \eta \oplus \varepsilon^1$. Potom máme $\operatorname{coker}(u) \cong \xi$ a $\operatorname{coker}(v) \cong \eta$.

Pripomeňme (poz. [20, 3(8)]), že ak $f\colon \alpha \to \beta$ je M-morfizmus z α do β, pričom matice príslušných lineárnych zobrazení na fíbroch majú všetky rovnakú hodnosť, tak $\operatorname{coker}(f)$ je vektorová fibrácia nad M, ktorej totálnym priestorom je faktorový priestor $E(\beta)/\sim$, pričom $y \sim y'$ práve vtedy, keď y, y' sú z rovnakého fíbra v $E(\beta)$ a $y - y' = f(x)$ pre nejaké $x \in E(\alpha)$; projekciu definujeme predpisom $\pi_{\operatorname{coker}(f)}([y]) = \pi_\beta(y)$. Podľa tvrdenia [20, 8(1.4)], ak $u, v\colon \varepsilon^1 \to \psi$ sú M-monomorfizmy z ε^1 do ψ a $\dim M \leq \dim \psi - 2$, tak $\operatorname{coker}(u) \cong \operatorname{coker}(v)$.

V našej situácii skutočne $\dim \psi - 2 = k - 1 \geq n = \dim M$, teda

$$\xi \cong \operatorname{coker}(u) \cong \operatorname{coker}(v) \cong \eta.$$

□

Dôsledok 1.1.10. *Nech ξ a η sú k-rozmerné vektorové fibrácie nad varietou M dimenzie n. Ak $k \geq n + 1$ a $\xi \oplus \psi \cong \eta \oplus \psi$ pre nejakú vektorovú fibráciu ψ nad M, tak $\xi \cong \eta$.*

Dôkaz. K vektorovej fibrácii ψ existuje komplement, t. j. taká vektorová fibrácia ψ', že $\psi \oplus \psi' \cong \varepsilon^m$ pre nejaké m. Takže

$$\xi \oplus \varepsilon^m \cong \xi \oplus \psi \oplus \psi' \cong \eta \oplus \psi \oplus \psi' \cong \eta \oplus \varepsilon^m$$

a podľa vety 1.1.9 máme $\xi \cong \eta$. □

Priamy súčet vektorových fibrácií hrá dôležitú úlohu aj pri nasledujúcom princípe, tzv. *princípe štiepenia*, ktorý umožňuje niektoré všeobecné úvahy o vektorových fibráciách redukovať na jednorozmerné fibrácie.

Definícia 1.1.11. *Štiepiace zobrazenie* vektorovej fibrácie ξ nad priestorom B je také zobrazenie $f\colon B_1 \to B$, že vektorová fibrácia $f^*\xi$ je priamym súčtom jednorozmerných fibrácií a $f^*\colon H^*(B; \mathbb{Z}_2) \to H^*(B_1; \mathbb{Z}_2)$ je monomorfizmus.

Dôkaz nasledujúcej vety možno nájsť napríklad v [20, 16(5.2)].

Veta 1.1.12. *Pre každú vektorovú fibráciu existuje štiepiace zobrazenie.*

Podobným spôsobom, akým sme k vektorovým fibráciám ξ a η nad B priradili fibráciu $\xi \oplus \eta$ s fíbrom $F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$, možno vytvoriť tenzorový súčin $\xi \otimes \eta$, duálnu fibráciu $\mathrm{Hom}(\xi, \mathbb{R})$, vonkajšiu mocninu $\lambda^k \xi$ a ďalšie. Umožňuje to nasledujúca konštrukcia.

Definícia 1.1.13. Označme $\mathcal{V}$ kategóriu konečnorozmerných vektorových priestorov nad $\mathbb{R}$ a izomorfizmov medzi nimi. Nech $T\colon \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je spojitý kovariantný funktor k premenných, t. j.

(i) ak $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$, tak $T(V_1, \ldots, V_k) \in \mathcal{V}$;

(ii) ak $f_i\colon V_i \to V_i'$ sú izomorfizmy pre $i = 1, \ldots, k$, tak aj

$$T(f_1, \ldots, f_k)\colon T(V_1, \ldots, V_k) \to T(V_1', \ldots, V_k')$$

je izomorfizmus;

(iii) $T(\mathrm{id}_{V_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V_k}) = \mathrm{id}_{T(V_1, \ldots, V_k)}$;

(iv) $T(f_1 \circ g_1, \ldots, f_k \circ g_k) = T(f_1, \ldots, f_k) \circ T(g_1, \ldots, g_k)$;

(v) závislosť $T(f_1, \ldots, f_k)$ od $f_1, \ldots, f_k$ je spojitá[1].

Nech $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sú vektorové fibrácie nad tým istým bázovým priestorom B. Potom nad B máme vektorovú fibráciu $T(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ s fíbrom $F_b = T(F_b(\xi_1), \ldots, F_b(\xi_k))$ pre každé $b \in B$, totálnym priestorom $E = \coprod_{b \in B} F_b$ a projekciou $\pi\colon E \to B$ s predpisom $\pi(e) = b$ pre $e \in F_b$.

Samozrejme, treba ešte zvoliť na totálnom priestore vhodnú topológiu a ukázať, že je splnená podmienka lokálnej triviálnosti. Detaily možno nájsť v [40]. Ak za funktor T zoberieme priamy súčet vektorových priestorov, bude $T(\xi, \eta)$ fibráciou $\xi \oplus \eta$ z definície 1.1.5; ak za T zoberieme tenzorový súčin vektorových priestorov, dostaneme tenzorový súčin vektorových fibrácií $T(\xi, \eta) = \xi \otimes \eta$; pri funktore $T(V) = \lambda^k V$ získame vektorovú fibráciu $\lambda^k \xi$; a podobne.

[1] V zmysle štandardnej topológie na množine všetkých izomorfizmov medzi dvoma vektorovými priestormi.

1.2 Stiefelove-Whitneyho charakteristické triedy

Odpoveď na niektoré otázky týkajúce sa variety často poskytne nejaký „algebraický invariant“, t. j. čiastočná informácia o variete, vyjadrená ako algebraický objekt (číslo, grupa, okruh, ...) – na základe hodnoty takého invariantu možno niekedy určiť, či varieta má alebo nemá danú vlastnosť. Medzi invarianty dôležité pri skúmaní vlastností vektorovej fibrácie patria kohomologické charakteristické triedy. Jedny z nich, ktoré budeme najviac používať, pripomenieme.

Definícia 1.2.1. Pre všetky vektorové fibrácie ξ majme postupnosti kohomologických tried

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Ak tieto postupnosti spĺňajú podmienky

(i) $w_0(\xi) = 1$ a $w_i(\xi) = 0$ pre i väčšie ako dimenzia ξ;

(ii) ak $f\colon B(\xi) \to B(\eta)$ je zobrazenie prislúchajúce k nejakému fíbre zachovávajúcemu zobrazeniu z ξ do η, tak $w_i(\xi) = f^*(w_i(\eta))$;

(iii) (*Whitneyho veta o súčine*) ak ξ a η sú vektorové fibrácie nad tým istým bázovým priestorom, tak
$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$
(symbol „$\cup$“ označujúci kohomologický súčin budeme často vynechávať);

(iv) $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$, kde γ_1^1 je fibrácia z príkladu 1.10,

nazveme $w_i(\xi)$ *Stiefelove-Whitneyho triedy* fibrácie ξ. Ak ξ je dotyková fibrácia variety M, namiesto $w_i(\xi)$ píšeme zvyčajne $w_i(M)$.

O podmienkach v predošlej definícii sa často hovorí ako o axiómach charakterizujúcich Stiefelove-Whitneyho triedy. Dôkaz existencie a jednoznačnosti týchto tried možno nájsť napríklad v [40] či v [20]. Pri dôkaze jednoznačnosti sa dá využiť štiepiaci princíp. Priamo z axióm ľahko vyplývajú niektoré zaujímavé poznatky.

Dôsledok 1.2.2. *Ak $\xi \cong \eta$, tak $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.* □

Dôsledok 1.2.3. *Pre triviálnu vektorovú fibráciu ε platí $w_i(\varepsilon) = 0$ pre $i > 0$.*

Dôkaz. Z diagramu

$$\begin{tikzcd} B \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ B \arrow[r, "1"] & * \end{tikzcd}$$

je zrejmé, že projekcia p_2 je fíbre zachovávajúce zobrazenie z ε_B^n do vektorovej fibrácie ε_*^n nad jednobodovým priestorom. Z druhej axiómy potom $w_i(\varepsilon_B^n) = 1^*(w_i(\varepsilon_*^n)) = 0$, keďže kohomologické grupy jednobodového priestoru sú (pre $i > 0$) triviálne. $\square$

Dôsledok 1.2.4. *Ak ε je triviálna vektorová fibrácia, tak $w_i(\varepsilon \oplus \xi) = w_i(\xi)$.* $\square$

Dôsledok 1.2.5. *Ak $\xi \sim_s \eta$, tak $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.* $\square$

Keďže Stiefelove-Whitneyho triedy vektorových fibrácií nad daným bázovým priestorom možno medzi sebou násobiť (a tie s rovnakým indexom sčítať), možno sa na postupnosť týchto tried pre danú vektorovú fibráciu pozrieť ako na prvok okruhu pozostávajúceho z formálnych nekonečných radov tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, pričom $a_i \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$. Súčin na tomto okruhu je definovaný predpisom

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \dots$$

Asociatívnosť vyplýva z asociatívnosti kohomologického súčinu. Keďže grupa koeficientov je $\mathbb{Z}_2$ a kohomologický súčin je až na znamienko komutatívny, je daný okruh komutatívny. Môžeme teda hovoriť o *totálnej* (alebo *úplnej*) *Stiefelovej-Whitneyho triede* n-rozmernej fibrácie ξ ako o prvku

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi) + 0 + \dots \tag{1.2.6}$$

uvedeného okruhu. Whitneyho vetu o súčine z definície 1.2.1 tak možno prepísať do tvaru

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta). \tag{1.2.7}$$

K prvkom tvaru (1.2.6) pritom môžeme vypočítať inverzné prvky, a to buď induktívne postupným spĺňaním rovností

$$w_1 + \bar{w}_1 = 0, \quad w_2 + w_1\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = 0, \quad w_3 + w_2\bar{w}_1 + w_1\bar{w}_2 + \bar{w}_3 = 0, \quad \dots$$

(pričom $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots$ je hľadaný inverzný prvok), alebo priamo rozvojom výrazu $(1 + (w_1 + w_2 + \dots))^{-1}$ do formálneho geometrického radu. To nám poskytuje účinnú metódu na počítanie Stiefelových-Whitneyho tried vektorovej fibrácie η, ak ich poznáme pre vektorové fibrácie ξ a $\xi \oplus \eta$; z (1.2.7) totiž máme $w(\eta) = \bar{w}(\xi)w(\xi \oplus \eta)$. V prípade, že $\xi \oplus \eta$ je triviálna, máme priamo $w(\eta) = \bar{w}(\xi)$. Trieda $\bar{w}(\xi)$ sa často nazýva *totálna duálna Stiefelova-Whitneyho trieda* vektorovej fibrácie ξ. Podobne ako $w(\xi)$, je jej dôležitou charakteristikou. Ak ξ je dotyková fibrácia variety M, o triede $\bar{w}(\xi)$ hovoríme ako o totálnej duálnej Stiefelovej-Whitneyho triede variety M a označujeme ju $\bar{w}(M)$.

Príklad 1.2.8. Pri štandardnom vložení $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je jednorozmerná normálová fibrácia ν triviálna a takisto aj $\nu \oplus \tau_{S^n}$. Preto aj $w(S^n) = 1$. Len na základe Stiefelových-Whitneyho tried teda dotykovú fibráciu sféry neodlíšime od triviálnej fibrácie.

Príklad 1.2.9. K štandardnému vloženiu $i\colon \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ ľahko určíme fíbre zachovávajúce zobrazenie $\bar{i}\colon E(\gamma_1^1) \to E(\gamma_n^1)$. Podľa druhej a štvrtej axiómy z definície 1.2.1 máme $i^*(w_1(\gamma_n^1)) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$. Teda nutne $w_1(\gamma_n^1) \neq 0$ a kanonická jednorozmerná fibrácia γ_n^1 nad $\mathbb{R}P^n$ nie je triviálna.

Pred ďalšou podkapitolou uvedieme ešte jednu aplikáciu Stiefelových-Whitneyho tried.

Veta 1.2.10. *Vektorová fibrácia ξ nad varietou M je orientovateľná práve vtedy, keď $w_1(\xi) = 0$.*

Dôkaz. Vektorová fibrácia ξ dimenzie n je orientovateľná práve vtedy, keď jednorozmerná fibrácia $\lambda^n\xi$ je triviálna. (Orientovať n-rozmerný vektorový priestor V totiž znamená vybrať jeden z dvoch smerov v $\lambda^n V$. Taký výber z každého fíbra je možný len pre triviálnu jednorozmernú fibráciu. Je to napríklad dôsledok vety 1.3.7.) Jednorozmerná fibrácia nad varietou je však triviálna práve vtedy, keď jej prvá Stiefelova-Whitneyho trieda je nenulová (poz. napr. [20, 16(3.4)], [15, 3.10]).

Ďalej použijeme princíp štiepenia. Ak $\xi = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$ je priamy súčet jednorozmerných fibrácií, tak

$$w_1(\lambda^n\xi) = w_1(\lambda^n(\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n)) = w_1(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_n) = w_1(\eta_1) + \dots + w_1(\eta_n) = w_1(\xi),$$

teda ξ je orientovateľná práve vtedy, keď $w_1(\xi) = 0$. Inak pre ξ existuje štiepiace zobrazenie f, pričom $f^*\xi$ je súčtom jednorozmerných fibrácií. Potom

$$f^*(w_1(\lambda^n\xi)) = w_1(f^*(\lambda^n\xi)) = w_1(\lambda^n(f^*\xi)) = w_1(f^*\xi) = f^*(w_1(\xi)),$$

a keďže f^* je monomorfizmus, tak aj v tomto prípade $w_1(\lambda^n\xi) = w_1(\xi)$. □

1.3 Rozpon vektorovej fibrácie

Jednou z vlastností vektorových fibrácií, ktorú v práci skúmame, je ich rozpon. V tejto podkapitole pripomenieme niekoľko pojmov, ktoré s rozponom súvisia, definujeme rozpon a uvedieme niekoľko známych tvrdení.

Definícia 1.3.1. Majme vektorovú fibráciu $\xi = (E, \pi, B)$. Jej *rezom* je každé spojité zobrazenie $s\colon B \to E$ spĺňajúce $\pi(s(b)) = b$ pre všetky $b \in B$. Rez je *všade nenulový*, ak $s(b)$ je pre každé b nenulový vektor fíbra F_b. Ak M je varieta a τ_M je jej dotyková fibrácia, tak rezy τ_M sú *vektorové polia* na variete M.

Zrejme každá vektorová fibrácia má aspoň jeden rez, konkrétne nulový rez. Zaujímavé sú však práve všade nenulové rezy. Od „niekde nulových“ rezov ich odlišuje napríklad to, že z nich vieme zostrojiť „jednotkový“ rez, t. j. rez, ktorého hodnota v každom bode je vektor veľkosti 1. Konštrukcia je jednoduchá: stačí namiesto rezu s zobrať rez s' definovaný predpisom $s'(x) = s(x)/\|s(x)\|$. Uveďme príklad vektorovej fibrácie, ktorá všade nenulový rez nemá.

Veta 1.3.2. *Vektorová fibrácia γ_n^1 pre $n \geq 1$ nemá všade nenulový rez.*

Dôkaz. Nech $s\colon \mathbb{R}P^n \to E(\gamma_n^1)$ je ľubovoľný rez. Uvažujme štandardnú projekciu

$$p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n, \qquad p(x) = \{\pm x\}.$$

Zloženie $s \circ p$ priradí každému $x \in S^n$ nejaký prvok $(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(\gamma_n^1)$, pričom $t(x)$ je spojitá reálna funkcia. Navyše, keďže $p(x) = p(-x)$, máme $t(-x) = -t(x)$. Zo súvislosti S^n dostávame, že existuje x_0 také, že $t(x_0) = 0$. Teda $s(\{\pm x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$ a rez s je v bode $\{\pm x_0\}$ nulový. □

Dôsledok 1.3.3. *Vektorová fibrácia γ_n^1 nie je triviálna.*

Dôkaz. Triviálna vektorová fibrácia $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}$ zjavne nejaký všade nenulový rez s má. Ak by sme mali izomorfizmus $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R} \cong \gamma_n^1$ realizovaný homeomorfizmom f, tak zrejme rez $f \circ s\colon \mathbb{R}P^n \to E(\gamma_n^1)$ by bol všade nenulový, čo je v spore s predošlou vetou. □

Venujme sa chvíľu varietám. Pre existenciu všade nenulového rezu dotykovej fibrácie, t. j. vektorového poľa, máme nasledujúce kritérium od H. Hopfa.

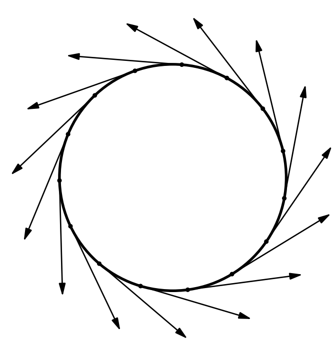
Veta 1.3.4 (Hopf [17]**).** *Na variete M existuje všade nenulové vektorové pole práve vtedy, keď $\chi(M) = 0$, kde $\chi(M)$ je Eulerova charakteristika, t. j. $\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i$ (číslo n je dimenzia M a b_i je i-te Bettiho číslo, teda dimenzia $H_i(M, F)$ pre ľubovoľné pole F).*

V prípade, že M je konečný *CW-komplex* (poz. napr. [8]), môžeme $\chi(M)$ vyčísliť priamo z počtu buniek v jednotlivých dimenziách: $\chi(M) = \sum(-1)^i a_i$, pričom a_i je počet buniek dimenzie i. Teda priamo z geometrických vlastností variety môžeme niekedy zistiť (ak poznáme bunkový rozklad variety), či na nej nenulové vektorové pole existuje.

Príklad 1.3.5. Pre párne n máme $\chi(S^n) = 2$, zatiaľ čo pre nepárne n máme $\chi(S^n) = 0$. Všade nenulové vektorové pole preto existuje len na sférach s nepárnou dimenziou. Pre nepárne n vieme také vektorové pole s ľahko zostrojiť, stačí položiť

$$s(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{n+1}, x_n).$$

Vektorové pole, ktoré takto dostaneme pre $n = 1$, je znázornené na obr. 1.



Obr. 1: *Všade nenulové vektorové pole na S^1*

Ak všade nenulový rez danej vektorovej fibrácie existuje, má zmysel pýtať sa, či existuje aj nejaký ďalší rez, ktorého vektory majú v každom bode iný smer ako vektory prvého rezu. Túto úvahu možno rozšíriť na ľubovoľný počet rezov.

Definícia 1.3.6. Nech $s_1, \ldots, s_k$ sú rezy danej vektorovej fibrácie ξ. Hovoríme, že tieto rezy sú *všade nezávislé*, ak pre každý bod $b \in B(\xi)$ sú vektory $s_1(b), \ldots, s_k(b)$ lineárne nezávislé.

Ak má vektorová fibrácia dimenziu n, neexistuje vo fíbri viac ako n lineárne nezávislých vektorov. Dimenzia fibrácie je teda horným ohraničením pre maximálny možný počet všade nezávislých rezov.

Veta 1.3.7. *Vektorová fibrácia s dimenziou n má n všade nezávislých rezov práve vtedy, keď je triviálna.*

Dôkaz. Nech $s_1, \ldots, s_n$ sú všade nezávislé rezy vektorovej fibrácie $\xi = (E, \pi, B)$. Vezmime zobrazenie

$$f\colon B \times \mathbb{R}^n \to E, \qquad f(b, x_1, \ldots, x_n) = x_1 s_1(b) + \cdots + x_n s_n(b).$$

Toto zobrazenie je spojité a zobrazuje fíbre triviálnej vektorovej fibrácie ε_B^n izomorfne na fíbre ξ, je teda fíbre zachovávajúcim zobrazením z ε_B^n do ξ. Rovnakým spôsobom ako v dôkaze vety 1.1.4 možno ukázať, že aj f^{-1} je spojité. Takže f je homeomorfizmus realizujúci $\varepsilon_B^n \cong \xi$.

Naopak, ak $\xi = (E, \pi, B)$ je triviálna so súradnicovým systémom (B, h), môžeme položiť

$$s_i = h(b, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\backslash \\ i\text{-ta pozícia}}}{1}, 0, \ldots, 0) \in F_b(\xi).$$

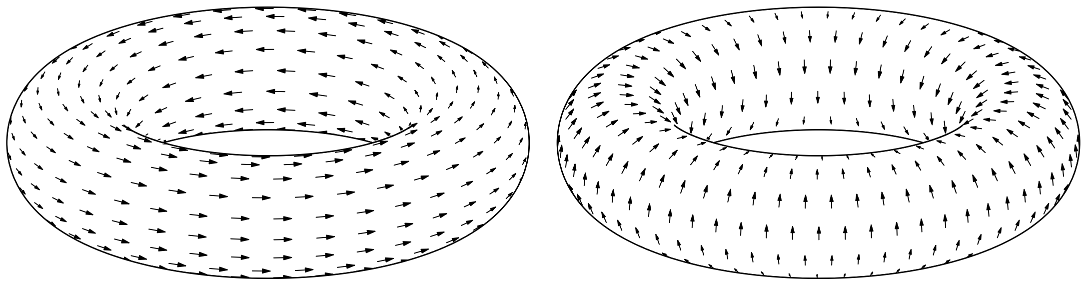
Zrejme $s_1, \ldots, s_n$ sú všade nezávislé rezy ξ. $\square$

Dôsledok 1.3.8. *Varieta dimenzie n je paralelizovateľná práve vtedy, keď na nej existuje n všade nezávislých vektorových polí.* $\square$

Príkladom paralelizovateľnej variety je torus, t. j. varieta $S^1 \times S^1$ (poz. obr. 2).

Zaveďme teraz osobitné označenie pre jednu zo základných vlastností vektorovej fibrácie, ktorú budeme skúmať.

Definícia 1.3.9 (napr. [70], [27]**).** Maximálny možný počet všade nezávislých rezov vektorovej fibrácie ξ nazývame *rozpon* fibrácie a označujeme $\operatorname{span} \xi$. Rozponom variety M (ozn. $\operatorname{span} M$) rozumieme rozpon jej dotykovej fibrácie τ_M.



Obr. 2: *Dve nezávislé vektorové polia na toruse*

Z doterajšieho vieme, že pre každú n-rozmernú fibráciu ξ platí $0 \leq \operatorname{span} \xi \leq n$. Taktiež vieme, že rozpon sa rovná dimenzii len pre triviálne vektorové fibrácie a paralelizovateľné variety (samozrejme, nemusí byť jednoduché zistiť, či je fibrácia triviálna). Pre fibrácie a variety, ktoré sme doteraz spomenuli, máme $\operatorname{span} \gamma_n^1 = 0$, $\operatorname{span} S^n = 0$ pre párne n, $\operatorname{span} S^1 = 1$, $\operatorname{span} S^n \geq 1$ pre nepárne n, $\operatorname{span}(S^1 \times S^1) = 2$. Uveďme výsledok pre sféry, o ktorom sme hovorili v úvode.

Definícia 1.3.10. Zapíšme prirodzené číslo n v tvare $(2a+1) \cdot 2^{c+4d}$, pričom $a, c, d \in \mathbb{N}_0$, $c \leq 3$. Číslo $\varrho(n) = 2^c + 8d$ sa nazýva *Hurwitzovo-Radonovo číslo.*

Veta 1.3.11 (Adams [1]). *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí* $\operatorname{span} S^{n-1} = \varrho(n) - 1$.

Dôsledok 1.3.12. *Jediné paralelizovateľné sféry sú S^1, S^3 a S^7.*

Dôkaz. Sféra S^{n-1} je pre $n \geq 2$ paralelizovateľná len vtedy, keď $\operatorname{span} S^{n-1} = n - 1$, t. j. $\varrho(n) = n$, čo pre čísla a, c, d dáva $2^c + 8d = (2a+1) \cdot 2^{c+4d}$. Pre $d > 0$ je ľavá strana poslednej rovnosti väčšia ako pravá. Jediná možnosť je teda $d = 0$, čo po dosadení dáva možnosti $n = 2, 4, 8$. □

Hurwitzovo-Radonovo číslo hrá úlohu aj pri ďalšej vete, ktorá za určitých podmienok poskytuje dolné ohraničenie pre rozpon n-násobného priameho súčtu vektorovej fibrácie a ktorú použijeme v kapitole 2.

Veta 1.3.13 (Korbaš [31]). *Nech ξ je vektorová fibrácia nad parakompaktným priestorom B. Potom pre ľubovoľné n, ak* $\operatorname{span}(n\xi) \geq 1$, *tak* $\operatorname{span}(n\xi) \geq \varrho(n)$.

Netriviálne horné ohraničenie rozponu možno niekedy odvodiť pomocou nasledujúcej vety.

Veta 1.3.14. *Nech $\xi = (E, \pi, B)$ je n-rozmerná vektorová fibrácia nad parakompaktným priestorom B. Ak na ξ existuje k všade nezávislých rezov, tak*

$$w_n(\xi) = w_{n-1}(\xi) = \cdots = w_{n-k+1}(\xi) = 0.$$

Dôkaz. Nech $s_1, \ldots, s_k$ sú všade nezávislé rezy fibrácie ξ. Podobne ako v dôkaze vety 1.3.7, zoberme zobrazenie

$$f\colon B \times \mathbb{R}^k \to E, \qquad f(b, x_1, \ldots, x_k) = x_1 s_1(b) + \cdots + x_k s_k(b).$$

Jeho obrazom je v každom fíbri $F_b(\xi)$ vektorový podpriestor dimenzie k generovaný vektormi $s_1(b), \ldots, s_k(b)$. Zjednotením týchto podpriestorov získame totálny priestor k-rozmernej vektorovej fibrácie η nad B, ktorá je navyše triviálna ($f\colon B \times \mathbb{R}^k \to E(\eta)$ je homeomorfizmus realizujúci $\varepsilon_B^k \cong \eta$). Keď na ξ zavedieme euklidovskú metriku[2], môžeme nad B definovať vektorovú fibráciu $\eta^\perp$, ktorej každý fíber $F_b(\eta^\perp)$ pozostáva z ortogonálnych doplnkov fíbra $F_b(\eta)$ vo fíbri $F_b(\xi)$. Podľa [40, 3.3] je $\eta^\perp$ skutočne vektorová fibrácia dimenzie $n - k$ a navyše $\xi \cong \varepsilon_B^k \oplus \eta^\perp$. Podľa dôsledku 1.2.4 máme $w_i(\xi) = w_i(\eta^\perp)$, teda $w_i(\xi) = 0$ pre $i > n - k$. □

Nulovosť Stiefelových-Whitneyho tried existenciu nezávislých rezov nezaručuje. Napríklad v nenulových dimenziách sú všetky Stiefelove-Whitneyho triedy dotykovej fibrácie τ_{S^n} nulové (poz. príklad 1.2.8), avšak pre párne n neexistuje ani jeden nenulový rez na τ_{S^n} (poz. príklad 1.3.5). Na druhej strane, môže sa stať, že rozpon skúmanej n-rozmernej vektorovej fibrácie ξ sa rovná najmenšiemu číslu i, pre ktoré je trieda $w_{n-i}(\xi)$ nenulová. To nám dáva motiváciu hľadať pre danú vektorovú fibráciu jej najvyššiu nenulovú Stiefelovu-Whitneyho triedu.

Predpokladajme teraz, že skúmaná vektorová fibrácia je dotykovou fibráciou variety M. Hopfova veta dáva kritérium, ktoré umožňuje zistiť (ak poznáme Eulerovu charakteristiku), či je rozpon variety M nulový, alebo či span $M \geq 1$. Namiesto priameho výpočtu rozponu si položme inú otázku: Kedy bude span $M \geq k$? Keby sme vedeli na túto otázku odpovedať pre každé k, vedeli by sme priamo vypočítať span M. Vďaka rôznym metódam sa podarilo nájsť podmienky, vyjadrené pomocou invariantov, ktoré *v princípe* možno vyrátať, aspoň pre $k \leq 4$. Priblížme si niektoré výsledky. Údaje čerpáme najmä z [32], kde je uvedená problematika podrobne spracovaná.

[2] Pri parakompaktnom priestore B je to vždy možné (poz. [40]).

Ak M je orientovaná varieta dimenzie n, zhrnutím poznatkov z [3], [68], [70], [37] dostaneme nutné a postačujúce podmienky pre $\operatorname{span} M \geq 2$ uvedené v tabuľke 1. Pritom $R(M) = \sum_i \dim H_{2i}(M, \mathbb{R}) \bmod 2$ je tzv. *reálna Kervaireova semicharakteristika* a $\sigma(M)$ je *signatúra* M (poz. napr. [40]).

Podobne pre neorientovateľnú varietu M dimenzie n máme nutné a postačujúce podmienky pre $\operatorname{span} M \geq 2$ v tabuľke 2, pričom β^* je Bocksteinov homomorfizmus[3]. Výsledky pochádzajú z prác [51], [33], [3] a [49].

$n = \dim M$	Kedy $\operatorname{span} M \geq 2$?
$n \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 5$	$w_{n-1}(M) = 0$ a $R(M) = 0$
$n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geq 10$	$\chi(M) = 0$
$n \equiv 3 \pmod 4$, $n \geq 7$	vždy
$n \equiv 4 \pmod 4$, $n \geq 4$	$\chi(M) = 0$ a $\sigma(M) \equiv 0 \pmod 4$

Tabuľka 1: *Nutné a postačujúce podmienky pre* $\operatorname{span} M \geq 2$, *ak* M *je orientovaná varieta*

$n = \dim M$	Kedy $\operatorname{span} M \geq 2$?
$n = 3$	$w_1^2(M) = 0$
$n \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 5$, $w_1^2(M) \neq 0$	$w_{n-1}(M) = 0$
$n \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 5$, $w_1^2(M) = 0$	$w_{n-1}(M) = 0$ a $R(M) = 0$
$n \equiv 3 \pmod 4$, $n \geq 7$, $w_1^2(M) \neq 0$	$w_{n-1}(M) = 0$
$n \equiv 3 \pmod 4$, $n \geq 7$, $w_1^2(M) = 0$	vždy
$n \equiv 2 \pmod 2$, $n \geq 4$	$\chi(M) = 0$ a $\beta^* w_{n-2}(M) = 0$

Tabuľka 2: *Nutné a postačujúce podmienky pre* $\operatorname{span} M \geq 2$, *ak* M *je neorientovateľná varieta*

V [32, 4.17,4.18] sú podobným spôsobom zhrnuté nutné a postačujúce podmienky pre $\operatorname{span} M \geq 3$. Uveďme špeciálne jedno tvrdenie z [52], ktoré použijeme v kapitole 2.

Tvrdenie 1.3.15. *Nech M je hladká uzavretá súvislá neorientovateľná varieta dimenzie n, kde $n \equiv 3 \pmod 4$. Ak $n \geq 7$, tak $\operatorname{span} M \geq 3$ práve vtedy, keď $\beta^* w_{n-3}(M) = 0$.*

Známe sú tiež viaceré výsledky pre $k = 4$, t. j. podmienky hovoriace, kedy je $\operatorname{span} M \geq 4$ (poz. napr. [33]). Pre vyššie hodnoty k máme k dispozícii len neveľa tvrdení o všeobecných

[3] Máme na mysli homomorfizmus $\beta^* \colon H^*(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{*+1}(M; \mathbb{Z}_2)$ asociovaný s krátkou exaktnou postupnosťou $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, poz. napr. [14].

varietách. Isté výsledky pre hodnoty $k = 7, 8, 9$ možno nájsť v [44] a otázka rozponu orientovateľných variet s dimenziou nanajvýš 7 je riešená v [69].

1.4 Stabilný rozpon

Zatiaľ jediná trieda variet, pre ktorú sme uviedli úplnú odpoveď na otázku rozponu, je trieda sfér (veta 1.3.11). Tento výsledok možno zaujímavým spôsobom rozšíriť. Jedna z vlastností sfér je, že $\tau_{S^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^{n+1}$ (to sme využili už v príklade 1.2.8). Variety s touto vlastnosťou, t. j. také variety M, že $\tau_M \oplus \varepsilon^1$ je triviálna vektorová fibrácia, sa nazývajú *stabilne paralelizovateľné variety*, alebo tiež *π-variety*.

Čiastočne v [22] a neskôr v [7] je dokázaná nasledujúca veta.

Veta 1.4.1. *Nech M je stabilne paralelizovateľná varieta a* $\dim M = n \geq 1$. *Potom M je buď paralelizovateľná, alebo* $\operatorname{span} M = \operatorname{span} S^n$. *Presnejšie:*

(a) *ak n je párne, M je paralelizovateľná práve vtedy, keď $\chi(M) = 0$;*

(b) *ak n je nepárne a $n \notin \{1, 3, 7\}$, M je paralelizovateľná práve vtedy, keď $\hat{\chi}_2(M) = 0$.*[4]

Pre stabilne paralelizovateľné variety M z triviálnosti $\tau_M \oplus \varepsilon^1$ vyplýva samozrejme aj triviálnosť $\tau_M \oplus \varepsilon^k$ pre všetky $k \geq 1$. V skutočnosti je číslo $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k$ (pre $k \geq 1$) konštanta pre každú varietu, nielen pre stabilne paralelizovateľnú. Ak totiž na $\tau_M \oplus \varepsilon^1$ existuje maximálne m nezávislých rezov, na $\tau_M \oplus \varepsilon^k \cong (\tau_M \oplus \varepsilon^1) \oplus \varepsilon^{k-1}$ ich existuje aspoň $m + k - 1$, teda určite $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k \geq \operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^1) - 1$. Ale aj naopak, ak na $\tau_M \oplus \varepsilon^k$ existuje maximálne m nezávislých rezov (zrejme $m \geq k$), tak rovnako ako v dôkaze vety 1.3.14 máme $\tau_M \oplus \varepsilon^k \cong \varepsilon^m \oplus \eta$ pre nejakú vektorovú fibráciu η. Takže

$$(\tau_M \oplus \varepsilon^1) \oplus \varepsilon^{k-1} \cong (\varepsilon^{m-k+1} \oplus \eta) \oplus \varepsilon^{k-1}$$

a podľa vety 1.1.9 dostávame $\tau_M \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^{m-k+1} \oplus \eta$. Preto $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^1) \geq m - k + 1$, t. j. $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^1) - 1 \geq \operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k$.

Definícia 1.4.2 (Koschorke [33]). *Stabilný rozpon* variety M je číslo $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^1) - 1$ (ktoré sa rovná číslu $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k$ pre ľubovoľné $k \geq 1$). Označujeme ho $\operatorname{stabspan} M$.

[4] $\hat{\chi}_2(M) = \sum_{2i<n} \dim H_i(M, \mathbb{Z}_2) \bmod 2$ je $\mathbb{Z}_2$-*Kervaireova semicharakteristika.*

Zrejme pre každú varietu M platí $\dim M \geq \operatorname{stabspan} M \geq \operatorname{span} M$. Kritérium nenulovosti stabilného rozponu poskytuje [27, 2.2(a)] v nasledujúcej vete.

Veta 1.4.3. *Pre varietu M je $\operatorname{stabspan} M > 0$ práve vtedy, keď Eulerova charakteristika $\chi(M)$ je párna.*

Nie vždy nám hodnota stabilného rozponu dá informáciu o rozpone (napríklad všetky sféry sú stabilne paralelizovateľné, t. j. $\operatorname{stabspan} S^n = n$, zatiaľ čo pre párne n máme $\operatorname{span} S^n = 0$). V niektorých prípadoch však tieto hodnoty môžu byť dokonca rovnaké, ako hovorí nasledujúce tvrdenie (poz. [33]).

Veta 1.4.4. *Nech M je varieta dimenzie n.*

(a) *Ak n je párne a $\chi(M) = 0$, tak $\operatorname{stabspan} M = \operatorname{span} M$ (pre $\chi(M) \neq 0$ je $\operatorname{span} M = 0$);*

(b) *ak $n \equiv 1 \pmod 4$, $w_1(M)^2 = 0$ a $R_L(M) = 0$, tak $\operatorname{stabspan} M = \operatorname{span} M$ (pre $R_L(M) \neq 0$ je za daných podmienok $\operatorname{span} M = 1$)[5];*

(c) *ak $n \equiv 3 \pmod 8$, $w_1(M) = w_2(M) = 0$ a $\hat{\chi}_2(M) = 0$, tak $\operatorname{stabspan} M = \operatorname{span} M$ (pre $\hat{\chi}_2(M) \neq 0$ je za daných podmienok $\operatorname{span} M = 3$).*

Teda jedna z možností, ako sa dá určiť (prípadne odhadnúť) rozpon variety, je skúsiť nájsť jej stabilný rozpon a následne zistiť jeho vzťah k rozponu (napríklad pomocou predošlého tvrdenia). Pre nepárne n máme ešte jeden vzťah dávajúci do súvisu rozpon a stabilný rozpon variety, vyplývajúci z tvrdení v [33].

Veta 1.4.5. *Nech M je varieta nepárnej dimenzie n. Potom*

$$\operatorname{span} M \geq \min\left\{\tfrac{n-1}{2}, \varrho(n+1) - 1, \operatorname{stabspan} M\right\}.$$

Dôkaz. Podľa [33, 20.4] platí $\operatorname{span} M \geq \min\{(n-1)/2, s(M), \operatorname{stabspan} M\}$[6] a podľa [33, 20.6] máme $s(M) \geq \operatorname{span} S^n$. Spolu s vetou 1.3.11 odtiaľ dostávame dokazovanú nerovnosť. □

Napokon uveďme ešte jeden poznatok z [27, 3.1.6], ktorý dáva do vzťahu rozpon alebo stabilný rozpon rôznych variet, ak tieto vystupujú ako báza, totálny priestor, resp. fíber nejakej hladkej fibrácie.

[5] $R_L(M)$ je *skrútená Kervaireova semicharakteristika*, poz. [3].
[6] Poz. [33, 20.3] pre definíciu $s(M)$.

Tvrdenie 1.4.6. *Ak (E, π, B, F) je hladká fibrácia, tak*

$$\operatorname{span} E \geq \operatorname{span} B \qquad a \qquad \operatorname{stabspan} E \geq \operatorname{stabspan} B.$$

Ak navyše fíber F je súvislý, tak

$$\operatorname{stabspan} B \leq \operatorname{stabspan} E \leq \operatorname{stabspan} F + \dim B.$$

1.5 Vnáranie a vkladanie variet do euklidovských priestorov

Ako sme uviedli v príklade 1.8, špeciálnym prípadom vektorovej fibrácie je normálová fibrácia, ktorá úzko súvisí s problémom vnorenia a vloženia, spomínaným v úvode práce. Pripomeňme najprv niekoľko základných pojmov a poznatkov.

Definícia 1.5.1. Nech M, N sú hladké variety (nie nutne kompaktné). Hladké zobrazenie $f\colon M \to N$ nazývame *vnorenie*, ak diferenciál $df_x\colon M_x \to N_{f(x)}$ je pre každé $x \in M$ injektívny. Vnorenie, ktoré je homeomorfizmom medzi M a $f(M)$ (s indukovanou topológiou na $f(M) \subset N$), sa nazýva *vloženie*.

Spomeňme, že ak varieta M je kompaktná, tak každé injektívne vnorenie M do N je automaticky vložením. Ak v definícii 1.5.1 za N zvolíme $\mathbb{R}^n$, bude f spĺňajúce dané podmienky vnorením (resp. vložením) do n-rozmerného euklidovského priestoru. To je situácia, ktorou sa ďalej budeme zaoberať. Presnejšie, pre danú varietu M nás zaujíma najmenšie n, pre ktoré sa M dá vnoriť (resp. vložiť) do $\mathbb{R}^n$. Základom pre ďalšie skúmanie sú nasledujúce dva výsledky ([74] resp. [10]).

Veta 1.5.2 (Whitney [74]). *Ak M je hladká varieta dimenzie d, tak M možno vložiť do $\mathbb{R}^{2d}$. Ak $d \geq 2$, M možno vnoriť do $\mathbb{R}^{2d-1}$.*

Veta 1.5.3 (Cohen [10]). *Ak M je hladká uzavretá varieta dimenzie $d \geq 2$ a $\alpha(d)$ je počet jednotiek v binárnom zápise čísla d, tak M možno vnoriť do $\mathbb{R}^{2d-\alpha(d)}$.*

Len na základe poznania dimenzie variety sa Cohenov výsledok zlepšiť nedá. Vyplýva to z príkladu 1.5.5 a z nasledujúcej vety.

Veta 1.5.4. *Ak hladkú varietu M dimenzie d možno vnoriť do $\mathbb{R}^n$, tak $\bar{w}_i(M) = 0$ pre všetky $i > n - d$. Ak ju možno vložiť do $\mathbb{R}^n$, tak aj $\bar{w}_{n-d}(M) = 0$.*

Dôkaz. K danému vnoreniu $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ priraďme normálovú fibráciu ν ako v príklade 1.8. Potom máme $\tau_M \oplus \nu \cong \varepsilon^n$ (poz. príklad 1.1.7), a teda $\bar{w}(M) = w(\nu)$. Keďže dimenzia ν je $n - d$, jej triedy v dimenziách vyšších ako $n - d$ sú nulové.

Ak f je vloženie, potom máme aj vloženie $\bar{f}\colon D(\nu) \to \mathbb{R}^n$ (kde $D(\nu)$ je *disková fibrácia*, t. j. množina vektorov z fíbrov fibrácie ν majúcich veľkosť nanajvýš 1), ktoré získame z rozšírenia f na tubulárne okolie (poz. napr. [8, II.11]). Ak $s\colon M \to D(\nu)$ je nulový rez a $S(\nu)$ je *sférická fibrácia* (množina jednotkových vektorov z fíbrov fibrácie ν), máme komutatívny diagram

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n-d}(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dr, "\bar{f}^*"] & & H^{n-d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - f(M);\mathbb{Z}_2) \arrow[ll, "i^*"'] \arrow[d, "\bar{f}^*", "\cong"'] \\
H^{n-d}(M;\mathbb{Z}_2) & & H^{n-d}(D(\nu);\mathbb{Z}_2) \arrow[ll, "s^*"'] & H^{n-d}(D(\nu), S(\nu);\mathbb{Z}_2), \arrow[l, "j^*"']
\end{tikzcd}$$

v ktorom i, j sú inklúzie párov priestorov. Zobrazenie $\bar{f}^*$ napravo je podľa axiómy vyrezania izomorfizmom. Navyše máme $\bar{w}_{n-d}(\nu) = s^*(j^*(t))$, kde $t \in H^{n-d}(D(\nu), S(\nu);\mathbb{Z}_2)$ je Thomova trieda (poz. napr. [66, 16.6]). Z komutatívnosti diagramu a z toho, že $H^{n-d}(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}_2)$ je triviálna, dostávame

$$\bar{w}_{n-d}(M) = \bar{w}_{n-d}(\nu) = f^*(i^*(\bar{f}^{*^{-1}}(t))) = f^*(0) = 0.$$

□

Príklad 1.5.5. Nech $d = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$, pričom $i_1 < \cdots < i_k$, čiže $\alpha(d) = k$. Zoberme d-rozmernú varietu

$$M = \mathbb{R}P^{2^{i_1}} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{2^{i_k}}.$$

Keďže totálnu Stiefelovu-Whitneyho triedu projektívneho priestoru možno vyjadriť v tvare $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1}$, kde $0 \neq a \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$, $a^n \neq 0$, $a^{n+1} = 0$, máme

$$w(\mathbb{R}P^{2^{i_j}}) = (1 + a_j)^{2^{i_j}+1} = (1 + a_j)(1 + a_j^{2^{i_j}}) = 1 + a_j + a_j^{2^{i_j}},$$

a teda $\bar{w}(\mathbb{R}P^{2^{i_j}}) = 1 + a_j + a_j^2 + \cdots + a_j^{2^{i_j}-1}$. Preto

$$\bar{w}(M) = \bar{w}(\mathbb{R}P^{2^{i_1}}) \otimes \cdots \otimes \bar{w}(\mathbb{R}P^{2^{i_k}}) = (1 + a_1 + \cdots + a_1^{2^{i_1}-1}) \otimes \cdots \otimes (1 + a_k + \cdots + a_k^{2^{i_k}-1}).$$

Keďže $(2^{i_1} - 1) + \cdots + (2^{i_k} - 1) = d - k$, dostávame $\bar{w}_{d-k}(M) = a_1^{2^{i_1}-1} \otimes \cdots \otimes a_k^{2^{i_k}-1} \neq 0$. Uvažovanú varietu M teda nemožno vnoriť do $\mathbb{R}^{2d-\alpha(d)-1}$ ani vložiť do $\mathbb{R}^{2d-\alpha(d)}$.

Podobnú nutnú podmienku pre vnorenie a vloženie možno sformulovať pomocou γ^i-operácií v K-teórii (poz. [4]). Ak M je hladká uzavretá varieta, tak môžeme vytvoriť grupu $KO(M)$ ako *Grothendieckovu grupu* asociovanú s $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ (poz. definíciu 1.6). Teda $KO(M)$ pozostáva z tried formálnych rozdielov $\xi - \eta$, pričom rozdiely $\xi - \eta$, $\xi' - \eta'$ sú v tej istej triede, ak pre nejakú vektorovú fibráciu ζ nad M platí $\xi \oplus \eta' \oplus \zeta \cong \xi' \oplus \eta \oplus \zeta$. Na $KO(M)$ je aditívna operácia definovaná samozrejme ako $(\xi - \eta) + (\xi' - \eta') = \xi \oplus \xi' - \eta \oplus \oplus \eta'$. Uvedená konštrukcia má nasledovnú univerzálnu vlastnosť: Každý homomorfizmus $\phi\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M) \to A$ do komutatívnej grupy A určuje homomorfizmus $\psi\colon KO(M) \to A$ predpisom $\psi(\xi - \eta) = \phi(\xi) - \phi(\eta)$.

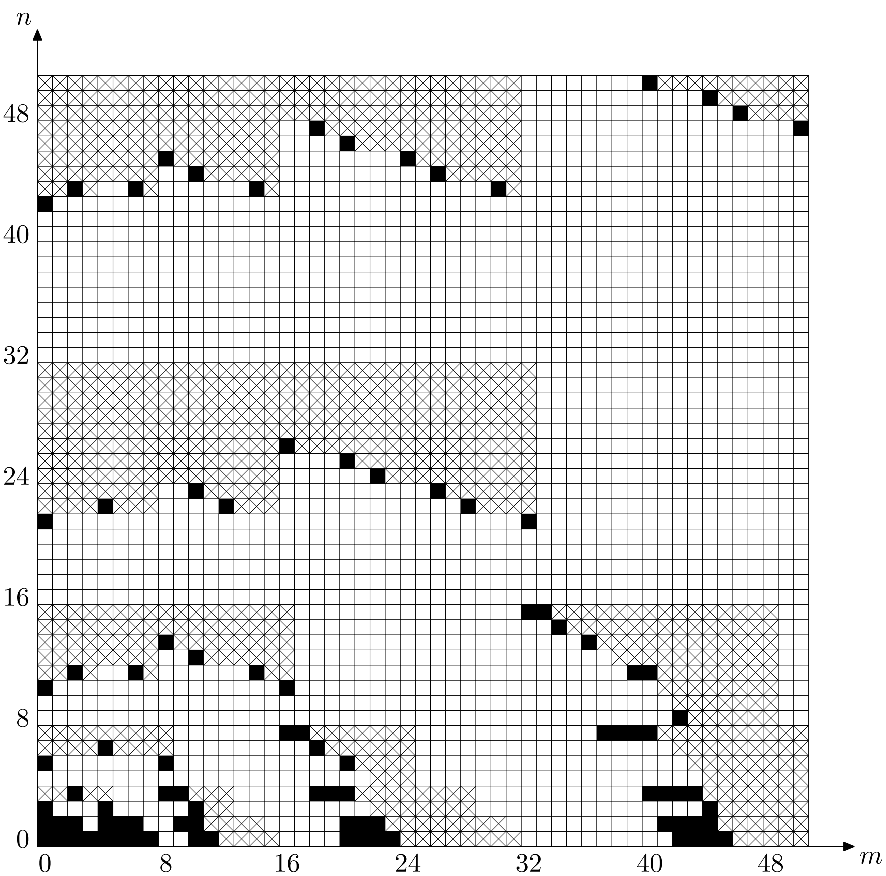
Nech $A(M)$ je grupa (s operáciou násobenia) formálnych nekonečných mocninových radov $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ v premennej t s koeficientmi v $KO(M)$. Na $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ máme definovaný operátor vonkajšej mocniny λ^i. Pomocou neho získame homomorfizmus $\lambda_t\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(M) \to \to A(M)$ s predpisom $\lambda_t(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^i \xi) t^i$, ktorý vďaka univerzálnej vlastnosti určuje homomorfizmus $\lambda_t\colon KO(M) \to A(M)$. Navyše pre každé i máme aj homomorfizmus $\lambda^i\colon KO(M) \to KO(M)$ ako i-ty koeficient v λ_t. Napokon zavedieme operácie $\gamma^i\colon KO(M) \to \to KO(M)$ tak, aby platilo

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i t^i (1-t)^{-i}.$$

V [4] možno nájsť nasledujúce nutné podmienky.

Veta 1.5.6 (Atiyah). *Ak hladkú varietu M dimenzie d možno vnoriť do $\mathbb{R}^n$, tak $\gamma^i(\varepsilon^d - - \tau_M) = 0$ pre všetky $i > n - d$. Ak ju možno vložiť do $\mathbb{R}^n$, tak aj $\gamma^{n-d}(\varepsilon^d - \tau_M) = 0$.*

V niektorých prípadoch môžeme dostať lepší výsledok pomocou vety 1.5.4, inokedy pomocou vety 1.5.6. Ilustrujeme to na príklade 1.5.7. V literatúre možno nájsť mnohé ďalšie poznatky týkajúce sa problému vnorenia a vloženia. Podrobný prehľad sa nachádza napríklad v [32].



Obr. 3: *Porovnanie dvoch výsledkov o vnorení a vložení Doldových variet;* ☒ *– lepší je výsledok dosiahnutý pomocou γ^i-operácií,* ☐ *– lepší je výsledok dosiahnutý pomocou duálnych Stiefelových-Whitneyho tried,* ■ *– oba výsledky sú rovnaké*

Príklad 1.5.7. Ucci v [73] odvodil, že Doldova varieta $P(m,n)$ (poz. definíciu 2.1) sa nedá vnoriť do $\mathbb{R}^{m+2n+\sigma^*(m,n)-1}$ ani vložiť do $\mathbb{R}^{m+2n+\sigma^*(m,n)}$, pričom

$$\sigma^*(m,n) = \begin{cases} \max\{\bar\sigma(m,n), 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, & \text{ak } m > 0, \\ 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{ak } m = 0, \end{cases}$$

$\bar\sigma(m,n)$ je najväčšie celé číslo s, pre ktoré $2^{s-1}\binom{m+n+s}{s}$ nie je deliteľné číslom $2^{\varphi(m)}$ a $\varphi(m)$ je počet tých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$, ktoré dávajú zvyšok 0, 1, 2 alebo 4 po delení ôsmimi. Uvedené tvrdenie pochádza z vyjadrenia γ^i-operácií na $KO(P(m,n))$. I keď predpis je zložitý, pre všetky konkrétne hodnoty m, n možno $\sigma^*(m,n)$ priamo vypočítať.

Taktiež možno postupom uvedeným v podkapitole 1.2 pre každé konkrétne hodnoty m, n vypočítať totálnu duálnu Stiefelovu-Whitneyho triedu $\bar{w}(P(m,n))$, keďže predpis pre $w(P(m,n))$ je známy (poz. (2.1.3)). Môžeme teda pre dané m, n porovnať, či je lepší Ucciho výsledok, alebo výsledok vyplývajúci z vety 1.5.4.

Výsledok porovnania pre hodnoty $0 \leq m \leq 50$, $0 \leq n \leq 50$ je na obr. 3.[7]

Jednou z tried variet, pri ktorých sa viacerí autori zaoberali problémom vnorenia a vloženia, sú Grassmannove variety. V kapitole 3 nájdeme určité nenulové duálne Stiefelove-Whitneyho triedy pre niektoré Grassmannove variety a doplníme doteraz známe výsledky.

[7]Na adrese `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/novotny/dold-manifold.php` možno po zadaní hodnôt m, n zobraziť totálnu a duálnu totálnu Stiefelovu-Whitneyho triedu variety $P(m,n)$. Tiež sa zobrazí, aké sú na základe týchto tried dôsledky pre rozpon (podľa vety 1.3.14) a pre vnorenie a vloženie (podľa vety 1.5.4), a ukáže sa porovnanie pre vnorenie a vloženie s Ucciho výsledkom.

Kapitola 2

Rozpon Doldových variet – výsledky dizertácie

V tejto kapitole odvodíme nové výsledky o rozpone a stabilnom rozpone Doldových variet. Sú obsiahnuté v práci Novotný [45].

Definícia 2.1. *Doldova varieta* je hladká uzavretá súvislá varieta

$$P(m,n) = (S^m \times \mathbb{C}P^n)/\sim, \qquad \text{kde} \quad (x,z) \sim (-x,\bar{z}).$$

Pritom $\mathbb{C}P^n$ je komplexný projektívny priestor (komplexnej) dimenzie n.

Keďže $P(m,0) = \mathbb{R}P^m$ a $P(0,n) = \mathbb{C}P^n$, špeciálnym prípadom Doldových variet sú aj reálny a komplexný projektívny priestor.

Pripomeňme, že Doldove variety ako prvý zaviedol A. Dold v [11]. Umožnili mu opísať generátory v neorientovaných okruhoch kobordizmu $\mathfrak{N}$. Mnohí ďalší autori sa neskôr zaoberali rôznymi vlastnosťami Doldových variet. Spomeňme J. J. Ucciho [73], W.-L. Tinga [71] a T. Kobayashiho [24], ktorí študovali problém vnorenia a vloženia týchto variet do euklidovských priestorov. Otázkou existencie skoro komplexných štruktúr na týchto varietách sa zaoberal Z. Tang [67]. R. Stong [65] opísal možné Stiefelove-Whitneyho triedy vektorových fibrácií nad Doldovými varietami a čiastočnú hladkú klasifikáciu hladkých variet homotopicky ekvivalentných s danou Doldovou varietou vypracoval H. K. Mukerjee [43]. Doteraz však nebolo príliš veľa známe o hodnotách span $P(m,n)$ a stabspan $P(m,n)$, okrem špeciálnych prípadov $P(m,0) = \mathbb{R}P^m$ a $P(0,n) = \mathbb{C}P^n$. Všeobecným prípadom sa zaoberali autori v nasledujúcich prácach. J. H. Kwak [34] riešil otázku, ktoré variety $P(m, n)$ sú paralelizovateľné (t. j. také, že span $P(m, n)$ sa rovná $\dim P(m, n) = m + 2n =: D$) alebo stabilne paralelizovateľné (t. j. stabspan $P(m, n) = D$). Okrem toho, v B. Junod a U. Suter [21] a M.-Y. Sohn [62] možno nájsť horné ohraničenia pre rozpon Doldových variet a súčinov Doldových variet.

V tejto kapitole v podkapitole 2.1 po pripomenutí niektorých základných faktov odvodíme viaceré nové ohraničenia pre (stab)span $P(m, n)$ a v niektorých prípadoch určíme presnú hodnotu span $P(m, n)$.

V podkapitole 2.2 nájdeme ďalšie ohraničenia pre stabilný rozpon variety $P(m, n)$ a uvedieme ďalšie výsledky o span $P(m, n)$ (špeciálne o span $P(1, n)$). V uvedenej podkapitole tiež porovnáme výsledky z [21] a [62] s naším horným ohraničením získaným v podkapitole 2.1 a ukážeme, že vo väčšine prípadov je náš výsledok lepší.

Napokon, v podkapitole 2.3 ukážeme, ako sa pri Doldových varietách $P(m, 1)$ pre $m \not\equiv 15 \pmod{16}$ dá skonštruovať maximálny možný počet všade lineárne nezávislých vektorových polí.

2.1 Ohraničenia pre (stab)span $P(m, n)$ získané pomocou Stiefelových-Whitneyho tried

Horné ohraničenia vyplývajúce z výpočtu Stiefelových-Whitneyho tried platia pre stabilný rozpon, a teda aj pre rozpon, keďže stabilný rozpon je väčší alebo rovnaký ako rozpon.

Pripomeňme ([11], [73]), že kanonické zobrazenie $S^m \times \mathbb{C}P^n \to P(m, n)$ indukuje dvojlistové nakrytie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S^m \times \mathbb{C}P^n \\ & & \downarrow \\ & & P(m, n). \end{array} \tag{2.1.1}$$

Zobrazenie $p\colon P(m, n) \to \mathbb{R}P^m$ indukované projekciou $S^m \times \mathbb{C}P^n \to S^m$ definuje hladkú fibráciu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & P(m, n) \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & \mathbb{R}P^m. \end{array} \tag{2.1.2}$$

Kohomologický okruh s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$ je daný predpisom

$$H^*(P(m,n),\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[c,d]/(c^{m+1} = d^{n+1} = 0), \text{ kde } c \in H^1,\ d \in H^2.$$

Pre totálnu Stiefelovu-Whitneyho triedu platí (poz. [11])

$$w(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}. \tag{2.1.3}$$

Keďže $\chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$, $\chi(S^m) = 1+(-1)^m$, a máme nakrytie (2.1.1), pre Eulerovu charakteristiku Doldovej variety dostávame

$$\chi(P(m,n)) = \tfrac{1}{2}\chi(S^m)\chi(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } m \text{ je párne,} \\ 0, & \text{ak } m \text{ je nepárne.} \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Z (2.1.3) máme $w_1(P(m,n)) = (m+n+1)c$, podľa vety 1.2.10 je teda $P(m,n)$ orientovateľná práve vtedy, keď $m+n$ je párne alebo $m=0$ (v druhom prípade totiž $c=0$).

Ako prvú informáciu o span $P(m,n)$ teraz uvedieme nasledujúci odhad.

Tvrdenie 2.1.5. *Pre ľubovoľnú Doldovu varietu platí*

$$\operatorname{span} P(m,n) \geq \operatorname{span} S^m.$$

Dôkaz. Odhad priamo vyplýva z fibrácie (2.1.2), z tvrdenia 1.4.6, a z faktu, že $\operatorname{span} S^m = \operatorname{span} \mathbb{R}P^m$. □

Podľa (2.1.4), ak m je párne, tak neexistuje žiadne všade nenulové vektorové pole na $P(m,n)$. Na druhej strane, máme $\operatorname{span} P(m,n) \geq 1$ pre ľubovoľné nepárne m (to vyplýva aj z tvrdenia 2.1.5). Keď sa teda budeme zaoberať rozponom $P(m,n)$, sústredíme sa na Doldove variety $P(m,n)$ pre nepárne m. Pre párne hodnoty m má zmysel skúmať stabilný rozpon.

Teraz uvedieme niekoľko horných ohraničení (stab)span $P(m,n)$, vyplývajúcich z výpočtu Stiefelových-Whitneyho charakteristických tried.

Z (2.1.3) dostaneme

$$w(P(m,n)) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\binom{m+n+1-j}{i}c^i d^j. \tag{2.1.6}$$

Pre k-tu Stiefelovu-Whitneyho triedu (pre $k = 0, 1, \dots, D$) máme odtiaľ predpis

$$w_k(P(m,n)) = \sum_{j=\max\{0,\lfloor (k-m)/2\rfloor\}}^{\min\{n,\lfloor k/2\rfloor\}} \binom{n+1}{j}\binom{m+n+1-j}{k-2j} c^{k-2j} d^j.$$

Pripomeňme tvrdenie známe v teórii čísel ako *Lucasova veta*, ktoré budeme viackrát používať.

Tvrdenie 2.1.7 (Lucas). *Nech p je prvočíslo a a, b sú nezáporné celé čísla, ktoré majú v sústave so základom p zápisy*

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots,$$
$$b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots \qquad (\textit{samozrejme, } 0 \le a_i < p,\ 0 \le b_i < p).$$

Potom

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^{\infty} \binom{a_i}{b_i} \pmod p,$$

pričom $\binom{a_i}{b_i} = 0$, ak $a_i < b_i$.

Špeciálne pre $p = 2$ dostávame, že kombinačné číslo $\binom{a}{b}$ je párne práve vtedy, keď binárny zápis čísla b má aspoň jednu cifru 1 na mieste, kde má binárny zápis čísla a cifru 0. Pre ďalšie potreby bude užitočné pre prirodzené číslo t označiť $2^{\nu(t)}$ najvyššiu mocninu dvoch, ktorá delí t.

Na základe implikácie

$$w_{D-k}(P(m,n)) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{(stab)span}\, P(m,n) \le k, \tag{2.1.8}$$

ktorá je priamym dôsledkom vety 1.3.14, možno teraz odvodiť nasledujúci horný odhad pre (stabilný) rozpon $P(m,n)$.

Veta 2.1.9. *Pre danú dvojicu (m,n) nezáporných celých čísel, zapíšme m v tvare*

$$m = 2^{\nu(n+1)} \cdot k + l, \qquad \textit{pričom } 0 \le l < 2^{\nu(n+1)}.$$

Potom

$$\text{(stab)span}\, P(m,n) \le 2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)} + 1) - 2.$$

Dôkaz. Koeficient pri $c^{m-2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}-1)}d^{n-(2^{\nu(n+1)}-1)}$ v Stiefelovej-Whitneyho triede

$$w_{m-2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}-1)+2(n-(2^{\nu(n+1)}-1))}(P(m,n))$$

sa podľa (2.1.6) rovná

$$\binom{n+1}{n+1-2^{\nu(n+1)}}\binom{m+n+1-n-1+2^{\nu(n+1)}}{m-2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}-1)} = \binom{n+1}{2^{\nu(n+1)}}\binom{m+2^{\nu(n+1)}}{2^{\nu(n+1)+\nu(k+1)}}.$$

Prvé kombinačné číslo je nepárne podľa Lucasovej vety. Druhé možno prepísať na

$$\binom{m+2^{\nu(n+1)}}{2^{\nu(n+1)+\nu(k+1)}} = \binom{2^{\nu(n+1)}\cdot(k+1)+l}{2^{\nu(n+1)+\nu(k+1)}} = \binom{2^{\nu(n+1)+\nu(k+1)}\cdot r+l}{2^{\nu(n+1)+\nu(k+1)}}$$

pre nejaké nepárne r, čo je tiež nepárne podľa Lucasovej vety. Takže uvažovaná Stiefelova-Whitneyho trieda je nenulová, a podľa (2.1.8) dostávame

$$\begin{aligned}(\text{stab})\text{span}\, P(m,n) &\leq 2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}-1)+2(2^{\nu(n+1)}-1) = \\ &= 2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}+1)-2.\end{aligned}$$

□

Tento horný odhad vedie k nasledovnému poznatku.

Tvrdenie 2.1.10. *Ak n je párne, tak*

$$(\text{stab})\text{span}\, P(m,n) \leq 2^{\nu(m+1)}-1.$$

Dôkaz. Pri použití označenia z vety 2.1.9 máme $\nu(n+1)=0$ a $k=m$, takže

$$(\text{stab})\text{span}\, P(m,n) \leq 2^0(2^{\nu(m+1)}+1)-2 = 2^{\nu(m+1)}-1.$$

□

Ako sme uviedli v definícii 1.3.10 a vo vete 1.3.11, $\operatorname{span} S^m = \varrho(m+1)-1$, pričom $\varrho(m+1) = 2^c+8d$ pre $\nu(m+1) = c+4d$, $c,d \geq 0$, $c \leq 3$. Preto z tvrdení 2.1.10 a 2.1.5 vyplýva nasledovné.

Dôsledok 2.1.11. *Ak n je párne a $\nu(m+1) \in \{1,2,3\}$, tak*

$$\operatorname{span} P(m,n) = \operatorname{span} S^m = 2^{\nu(m+1)} - 1.$$

Tvrdenie 2.1.12. *Ak $n \equiv 1 \pmod 4$ a m je nepárne (t. j. $\nu(m+1) > 0$), tak*

$$(\mathrm{stab})\operatorname{span} P(m,n) \leq 2^{\nu(m+1)}.$$

Dôkaz. Pri označení ako vo vete 2.1.9 môžeme napísať

$$\nu(n+1) = 1, \quad k = \frac{m-1}{2} \quad \text{a} \quad \nu(k+1) = \nu(m+1) - 1,$$

takže

$$(\mathrm{stab})\operatorname{span} P(m,n) \leq 2^1(2^{\nu(m+1)-1} + 1) - 2 = 2^{\nu(m+1)}.$$

□

Rovnakým spôsobom ako v 2.1.11 dostaneme nasledovný odhad, s hornou a dolnou hranicou líšiacou sa len o 1.

Dôsledok 2.1.13. *Ak $n \equiv 1 \pmod 4$ a $\nu(m+1) \in \{1,2,3\}$, tak*

$$2^{\nu(m+1)} - 1 \leq \operatorname{span} P(m,n) \leq 2^{\nu(m+1)}.$$

Pre $n = 1$ tento výsledok zlepšíme v podkapitole 2.3 a ukážeme, že

$$\operatorname{span} P(m,1) = 2^{\nu(m+1)}, \qquad \text{ak } \nu(m+1) \in \{1,2,3\}.$$

Okrem prípadov opísaných v 2.1.11 a prípadov, keď m je párne, nemožno odvodiť rovnosť $\operatorname{span} P(m,n) = \operatorname{span} S^m$, ak platí, len použitím tvrdenia 2.1.5 a implikácie (2.1.8). Presnejšie, podľa nasledujúcej vety je trieda $w_{D-\operatorname{span} S^m}(P(m,n))$ nulová (pripomeňme, že D označuje dimenziu variety $P(m,n)$).

Veta 2.1.14. *Nech $\nu(m+1) > 0$ (t. j. m je nepárne). Stiefelove-Whitneyho triedy*

$$w_{D-i}(P(m,n)), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^{\nu(m+1)} - 2,$$

sú všetky nulové. Ak n je nepárne, tak aj trieda $w_{D-(2^{\nu(m+1)}-1)}(P(m,n))$ je nulová.

Dôkaz. V $w_{D-i}(P(m,n))$ sa môžu vyskytovať iba sčítance

$$c^{m-i}d^n, c^{m-i+2}d^{n-1}, c^{m-i+4}d^{n-2}, \dots,$$

t. j. členy tvaru $c^{m-i+2j}d^{n-j}$ pre $j \geq 0$, $j \leq n$, $2j \leq i$. Takže chceme ukázať (podľa (2.1.6)) že koeficienty

$$\binom{n+1}{n-j}\binom{m+1+j}{m-i+2j}$$

sú párne pre $i = 0, 1, \dots, 2^{\nu(m+1)} - 2$ (alebo pre i až po $2^{\nu(m+1)} - 1$, keď n je nepárne) a pre $j = 0, 1, \dots, \min\{n, \lfloor i/2 \rfloor\}$. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na j. Presnejšie, ukážeme, že druhý činiteľ uvažovaného súčinu kombinačných čísel je párny (okrem prípadu, keď n je nepárne, $i = 2^{\nu(m+1)} - 1$ a $j = 0$; ale vtedy je očividne párny prvý činiteľ).

Pre $j = 0$ je skúmané číslo,

$$\binom{m+1}{m-i} = \binom{q \cdot 2^{\nu(m+1)}}{i+1} \qquad (q \text{ nepárne}),$$

párne pre všetky $i = 0, 1, \dots, 2^{\nu(m+1)} - 2$ podľa Lucasovej vety.

Pre $j \geq 1$, $j \leq \min\{n, \lfloor i/2 \rfloor\}$ máme

$$\begin{aligned}\binom{m+1+j}{m-i+2j} &= \binom{m+1+(j-1)}{m-i+2j} + \binom{m+1+(j-1)}{m-i+2j-1} = \\ &= \binom{m+1+(j-1)}{m-(i-2)+2(j-1)} + \binom{m+1+(j-1)}{m-(i-1)+2(j-1)}.\end{aligned}$$

Podľa indukčného predpokladu sú ostatné dve kombinačné čísla párne. □

Aplikovaním podmienok z tabuľky 2 a tvrdenia 1.3.15 dostaneme pre span $P(m,n)$ nasledovné dva výsledky.

Tvrdenie 2.1.15. *Ak* $m \equiv n \equiv 1 \pmod 4$, *tak*

$$\operatorname{span} P(m,n) = 2.$$

Dôkaz. Pre $n \equiv 1 \pmod 4$ môžeme použiť dôsledok 2.1.13. Ak $m \equiv 1 \pmod 4$, tak $\nu(m + + 1) = 1$, teda span $P(m,n) \leq 2$. Pre dimenziu platí $D = 2n + m \equiv 3 \pmod 4$. Keďže

$m+n$ je párne a $m \neq 0$, $P(m,n)$ je neorientovateľná. Podľa vety 2.1.14 platí $w_{D-1} = 0$ (a špeciálne pre varietu $P(1,1)$ dimenzie 3 máme $w_1^2 = 0$). Použitím podmienok z tabuľky 2 dostávame $\operatorname{span} P(m,n) \geq 2$. □

Tvrdenie 2.1.16. *Ak* $m \equiv 1 \pmod 4$ *a* $n \equiv 3 \pmod 4$, *tak*

$$\operatorname{span} P(m,n) \geq 3.$$

Dôkaz. Pre dimenziu platí $D = 2n + m \equiv 3 \pmod 4$. Keďže $m+n$ je párne, $P(m,n)$ je neorientovateľná a $D = 2n+m \geq 2\cdot 3+1 = 7$. Podľa vety 2.1.14 platí $w_{D-3}(P(m,n)) = 0$, teda nutne $\beta^* w_{D-3}(P(m,n)) = 0$. Odhad $\operatorname{span} P(m,n) \geq 3$ teda priamo vyplýva z tvrdenia 1.3.15. □

Výsledky, ktoré sme doposiaľ odvodili, sú zhrnuté v tabuľke 3; pre typografické dôvody v nej skracujeme $\operatorname{span} P(m,n) = s$.

m mod 16, n mod 4	$n \equiv 0$	$n \equiv 1$	$n \equiv 2$	$n \equiv 3$
$m \equiv 1$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s \geq 3$
$m \equiv 3$	$s = 3$	$s \in \{3,4\}$	$s = 3$	$s \geq 3$
$m \equiv 5$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s \geq 3$
$m \equiv 7$	$s = 7$	$s \in \{7,8\}$	$s = 7$	$s \geq 7$
$m \equiv 9$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s \geq 3$
$m \equiv 11$	$s = 3$	$s \in \{3,4\}$	$s = 3$	$s \geq 3$
$m \equiv 13$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s \geq 3$
$m \equiv 15$	$s \geq 8$	$s \geq 8$	$s \geq 8$	$s \geq 8$
$m \equiv 2t$ (všetky t)	$s = 0$	$s = 0$	$s = 0$	$s = 0$

Tabuľka 3: *Výsledky o invariante* $\operatorname{span} P(m,n)$

2.2 Ohraničenia stabilného rozponu a ďalšie výsledky o rozpone $P(m,n)$

Spojením vety 1.4.3 s (2.1.4) dostávame, že ak m je párne, tak

$$\operatorname{stabspan} P(m,n) = \operatorname{span} P(m,n) = 0 \qquad \text{pre } n \text{ párne},$$

$$\operatorname{stabspan} P(m,n) > \operatorname{span} P(m,n) = 0 \qquad \text{pre } n \text{ nepárne}.$$

Takže stabilný rozpon $P(m,n)$ sa môže, ale nemusí, rovnať rozponu.

Podľa [63], $\operatorname{stabspan} \mathbb{C}P^n = 2\nu(n+1)$. Použitím tvrdenia 1.4.6 pre fibráciu (2.1.2) dostaneme

$$\operatorname{stabspan} P(m,n) \leq \operatorname{stabspan} \mathbb{C}P^n + \dim \mathbb{R}P^m = 2\nu(n+1) + m. \tag{2.2.1}$$

Samozrejme, číslo $2\nu(n+1)+m$ je zároveň horným ohraničením pre $\operatorname{span} P(m,n)$, a je totožné s odhadom odvodeným v [21] pomocou KU-teórie. Pri označení ako vo vete 2.1.9 máme

$$\begin{aligned} 2\nu(n+1) + m &= 2\nu(n+1) + 2^{\nu(n+1)} \cdot k + l = \\ &= 2\nu(n+1) + 2^{\nu(n+1)}(r \cdot 2^{\nu(k+1)} - 1) + l \end{aligned}$$

(r je nepárne), čo je pre $r \geq 3$ viac ako $2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}+1)-2$. Teda odhad z vety 2.1.9 je v tomto prípade lepší. Len ak $r=1$, môže byť lepší odhad (2.2.1). To sa stane (pre $r=1$) vtedy, keď

$$(2^{\nu(n+1)}(2^{\nu(k+1)}+1)-2) - (2\nu(n+1)+m) = 2^{\nu(n+1)+1} - 2 - 2\nu(n+1) - l > 0.$$

Táto podmienka je splnená pre $\nu(n+1) \geq 3$ a ľubovoľné l, a pre $\nu(n+1) = 2$ a $l < 2$.

Teraz porovnáme odhad z vety 2.1.9 s odhadom získaným v [62, 3.2], podľa ktorého

$$\text{(stab)span}\, P(m,n) \leq m + 2n - \delta^*(m,n). \tag{2.2.2}$$

Hodnota $\delta^*(m,n)$ je definovaná ako

$$\delta^*(m,n) = \begin{cases} \max\{s, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\} & \text{ak } m \neq 0, \\ 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{ak } m = 0, \end{cases}$$

kde s je najväčšie celé číslo, pre ktoré $2^{s-1}\binom{m+n+1}{s}$ nie je deliteľné $2^{\phi(m)}$ a $\phi(m)$ je počet takých celých čísel t, že $0 < t \leq m$ a $t \equiv 0, 1, 2,$ alebo $4 \pmod 8$. Zrejme $s \leq \phi(m) \leq \frac{m}{2}+2$, teda

$$\delta^*(m,n) \leq \max\{\tfrac{m}{2}+2, 2\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\} \leq \max\{\tfrac{m}{2}+2, n\}.$$

Pre odhad (2.2.2) potom máme

$$m + 2n - \delta^*(m,n) \geq m + 2n - \max\{\tfrac{m}{2}+2, n\} = \min\{\tfrac{m}{2}+2n-2, m+n\}.$$

Pri označení ako vo vete 2.1.9 máme $n = a\cdot 2^{\nu(n+1)}-1$ pre nejaké nepárne a, $m = 2^{\nu(n+1)}k+$ $+\, l$, a $k = r\cdot 2^{\nu(k+1)} - 1$ pre nejaké nepárne r. Dosadením do posledného výrazu možno ľahko overiť, že odhad (2.2.2) môže byť lepší ako odhad z vety 2.1.9 len pre $r = 1$ (a aj v tom prípade dostaneme ďalšie podmienky pre $\nu(k+1)$, $\nu(n+1)$, a a l). Teda vo väčšine prípadov je odhad z vety 2.1.9 lepší.

Pre dotykovú fibráciu τ variety $P(m,n)$ máme ([73]) vzťah

$$\tau\oplus\xi\oplus\varepsilon^2 \cong (m+1)\xi\oplus(n+1)\eta, \tag{2.2.3}$$

kde ξ je jediná netriviálna jednorozmerná fibrácia a η je dvojrozmerná fibrácia nad $P(m,n)$. Keďže $\dim(\tau\oplus\varepsilon^2) > \dim P(m,n)$, podľa dôsledku 1.1.10 môžeme jedno ξ z oboch strán v (2.2.3) odstrániť. Takto získame úplný opis stabilnej dotykovej fibrácie,

$$\tau\oplus\varepsilon^2 \cong m\xi\oplus(n+1)\eta.$$

Uvažujme prípad $m = 1$. Uvedený vzťah má potom tvar $\tau\oplus\varepsilon^2\cong\xi\oplus(n+1)\eta$. Keďže $\dim(n+1)\eta = 2n+2 > 2n+1 = \dim P(1,n)$, nutne $\operatorname{span}((n+1)\eta)\geq 1$. Podľa vety 1.3.13 teda dostávame $\operatorname{span}((n+1)\eta)\geq\varrho(n+1)$. Potom

$$\operatorname{span}(\tau\oplus\varepsilon^2) = \operatorname{span}(\xi\oplus(n+1)\eta)\geq\operatorname{span}((n+1)\eta)\geq\varrho(n+1),$$

a teda $\operatorname{stabspan} P(1,n)\geq\varrho(n+1)-2$. Použitím vety 1.4.5 na $P(1,n)$ dostávame

$$\begin{aligned}\operatorname{span} P(1,n) &\geq \min\{n, \varrho(2n+2)-1, \operatorname{stabspan} P(1,n)\}\geq\\ &\geq \min\{n,\varrho(2n+2)-1,\varrho(n+1)-2\} = \varrho(n+1)-2.\end{aligned}$$

Ak $\nu(n+1) = c+4d$ $(0\leq c\leq 3,\ d\geq 0)$, spojením predošlej nerovnosti a odhadu (2.2.1) dostaneme

$$2^c+8d-2\leq\operatorname{span} P(1,n)\leq 2c+8d+1.$$

Inými slovami, pre $\operatorname{span} P(1,n)$ máme len možnosti uvedené v tabuľke 4.

Tento odhad zlepšuje niektoré výsledky z podkapitoly 2.1. Napríklad pre $n = 7$ máme teraz $\operatorname{span} P(1,7)\in\{6,7\}$, zatiaľ čo podľa podkapitoly 2.1 sme mali len $\operatorname{span} P(1,7)\geq 3$, a podľa (2.1.3) platí $w(P(1,7)) = 1+c$, teda podľa (2.1.8) sme mali len $\operatorname{span} P(1,7)\leq 14$.

Uvedený prístup, založený na vete 1.3.13, možno aplikovať aj vo všeobecnejšej situácii

c	možnosti pre $\operatorname{span} P(1,n)$, keď $\nu(n+1)=c+4d$
0	$8d-1$, $8d$, $8d+1$
1	$8d$, $8d+1$, $8d+2$, $8d+3$
2	$8d+2$, $8d+3$, $8d+4$, $8d+5$
3	$8d+6$, $8d+7$

Tabuľka 4: *Výsledky o invariante* $\operatorname{span} P(1,n)$

a vylepšiť tak niektoré z predošlých výsledkov. Označme $d_1=\operatorname{nsd}(m,n+1)$, $d_2=\operatorname{nsd}(m-1,n+1)$. Potom

$$\tau\oplus\varepsilon^2\cong m\xi\oplus(n+1)\eta=\underbrace{d_1\left(\tfrac{m}{d_1}\xi\oplus\tfrac{n+1}{d_1}\eta\right)}_{\dim=2n+m+2},$$

a podľa vety 1.3.13 $\operatorname{stabspan} P(m,n)\geq\varrho(d_1)-2$. Podobne,

$$\tau\oplus\varepsilon^2\cong\xi\oplus(m-1)\xi\oplus(n+1)\eta=\xi\oplus\underbrace{d_2\left(\tfrac{m-1}{d_2}\xi\oplus\tfrac{n+1}{d_2}\eta\right)}_{\dim=2n+m+1},$$

teda $\operatorname{stabspan} P(m,n)\geq\varrho(d_2)-2$. Pre nepárne $m\geq 3$ máme rovnaký odhad aj pre $\operatorname{span} P(m,n)$, lebo podľa vety 1.4.5 dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{span} P(m,n)&\geq\min\left\{\tfrac{m+2n-1}{2},\varrho(m+2n+1)-1,\operatorname{stabspan} P(m,n)\right\}\geq\\ &\geq\min\Big\{\underbrace{\tfrac{(m-1)+(n+1)+(n-1)}{2}}_{\geq d_2\geq\varrho(d_2)},\underbrace{\varrho(m+2n+1)-1}_{\geq\varrho(d_2)-1,\ \text{keďže}\ d_2\ \mid\ m+2n+1},\varrho(d_2)-2\Big\}=\varrho(d_2)-2.\end{aligned}$$

Napríklad pre $P(9,7)$ takto zisťujeme, že $\operatorname{span} P(9,7)\geq\varrho(8)-2=6$, zatiaľ čo podľa tvrdenia 2.1.16 sme mali iba $\operatorname{span} P(9,7)\geq 3$.

2.3 Vektorové polia na $P(m,1)$

Podľa tvrdenia 2.1.15 vieme, že ak $m\equiv 1 \pmod 4$, tak $\operatorname{span} P(m,1)=2=\operatorname{span} S^m+1$. Teraz ukážeme, že $\operatorname{span} P(m,1)\geq\operatorname{span} S^m+1$ aj pre ostatné nepárne hodnoty m. S výnimkou prípadu $m\equiv 15 \pmod{16}$ tak podľa dôsledku 2.1.13 priamo budeme mať $\operatorname{span} P(m,1)=\operatorname{span} S^m+1$ pre nepárne m.

Tvrdenie 2.3.1. *Existuje taký homeomorfizmus $g\colon \mathbb{C}P^1 \to S^2$, že*

$$\textit{ak} \quad g(z_1,z_2) = (x_1,x_2,x_3), \qquad \textit{tak} \quad g(\bar z_1,\bar z_2) = (x_1,x_2,-x_3).$$

(Sféru S^2 chápeme ako množinu $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$.)

Dôkaz. Vhodným zobrazením je

$$g(z_1,z_2) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}(z_1\bar z_2)}{|z_1|^2+|z_2|^2}, \frac{|z_2|^2-|z_1|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}(z_1\bar z_2)}{|z_1|^2+|z_2|^2} \right).$$

Ľahko možno overiť, že $g(z_1,z_2) \in S^2$ a že je splnená daná podmienka. Takže už len stačí ukázať, že g je homeomorfizmus. Keďže g je zrejme spojité, stačí nájsť spojité zobrazenie $f\colon S^2 \to \mathbb{C}P^1$ také, že $f \circ g$ aj $g \circ f$ sú identické zobrazenia. Takým f je zobrazenie definované predpisom

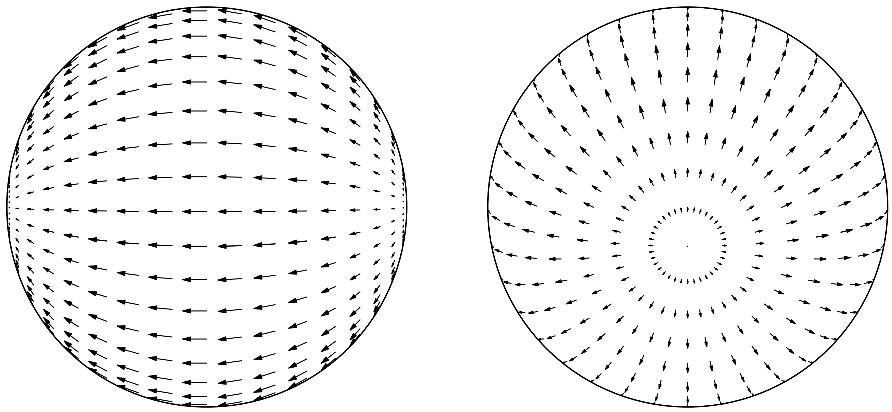
$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (x_1+ix_3, 1+x_2), & \text{ak } (x_1,x_2,x_3) \neq (0,-1,0), \\ (1-x_2, x_1-ix_3), & \text{ak } (x_1,x_2,x_3) \neq (0,1,0). \end{cases}$$

Krátkym výpočtom možno ukázať, že pre $(x_1,x_2,x_3) \notin \{(0,-1,0),(0,1,0)\}$ sú oba predpisy totožné (hodnoty sú v $\mathbb{C}P^1$). Zobrazenie f je teda dobre definované. Keďže je spojité na množine $S^2 \setminus (0,-1,0)$ aj na množine $S^2 \setminus (0,1,0)$, je spojité na celej S^2. Napokon, mechanickým výpočtom jednoducho overíme, že $f \circ g$ a $g \circ f$ sú identity. □

Veta 2.3.2. *Nech $k \geq 1$ a $v_1,\dots,v_k\colon S^m \to TS^m$ sú vektorové polia, ktoré sú v každom bode S^m lineárne nezávislé a ktoré sú ekvivariantné vzhľadom na reláciu $x \sim -x$. Potom na $S^m \times S^2$ existuje aspoň $k+1$ vektorových polí, ktoré sú v každom bode lineárne nezávislé a ktoré sú ekvivariantné vzhľadom na reláciu $(x,(x_1,x_2,x_3)) \sim (-x,(x_1,x_2,-x_3))$.*

Dôkaz. Na $S^m \times S^2$ zoberme vektorové polia $w_1,\dots,w_{k+1}\colon S^m \times S^2 \to T(S^m \times S^2)$ definované predpismi

$$\begin{aligned} w_i(x,(x_1,x_2,x_3)) &= (v_i(x),(0,0,0)) \quad \text{pre } i = 1,\dots,k-1, \\ w_k(x,(x_1,x_2,x_3)) &= (x_1 v_k(x),(x_1^2-1, x_1x_2, x_1x_3)), \\ w_{k+1}(x,(x_1,x_2,x_3)) &= (x_2 v_k(x),(x_1x_2, x_2^2-1, x_2x_3)). \end{aligned}$$



Obr. 4: *Druhé zložky vektorových polí w_k a w_{k+1}*

Ľahko možno overiť, že uvedené zobrazenia sú naozaj hladké vektorové polia na $S^m \times \times S^2$. Tieto polia sú navyše v každom bode lineárne nezávislé. Ak by totiž boli v nejakom bode $(x,(x_1,x_2,x_3))$ lineárne závislé, existovali by koeficienty $\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}\in\mathbb{R}$ (nie všetky nulové) také, že $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i w_i=\vec{0}$. Rozpísaním po jednotlivých zložkách odtiaľ dostaneme

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i v_i(x)+(\alpha_k x_1+\alpha_{k+1}x_2)v_k(x),\\
0 &= \alpha_k(x_1^2-1)+\alpha_{k+1}x_1x_2 = x_1(\alpha_k x_1+\alpha_{k+1}x_2)-\alpha_k,\\
0 &= \alpha_k x_1x_2+\alpha_{k+1}(x_2^2-1) = x_2(\alpha_k x_1+\alpha_{k+1}x_2)-\alpha_{k+1},\\
0 &= \alpha_k x_1x_3+\alpha_{k+1}x_2x_3.
\end{aligned}$$

Keďže $v_1,\dots,v_k$ sú v každom bode lineárne nezávislé, z prvej rovnosti nutne $\alpha_1=\dots= =\alpha_{k-1}=\alpha_k x_1+\alpha_{k+1}x_2=0$. Dosadením tohto do druhej a tretej rovnosti dostaneme aj $\alpha_k=\alpha_{k+1}=0$. To je v rozpore s predpokladom, že nie všetky α_i sú nulové.

Ostáva overiť ekvivariantnosť zvolených vektorových polí vzhľadom na reláciu $(x,z)\sim \sim\Psi(x,z)$, kde $z=(x_1,x_2,x_3)$, $\Psi(x,z)=(-x,\psi(z))$, $\psi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,-x_3)$. Podľa nášho predpokladu sú polia v_i ekvivariantné vzhľadom na reláciu $x\sim -x$. To znamená, že môžeme zobrať hladkú krivku $\gamma_x^i\colon\mathbb{R}\to S^m$ prechádzajúcu cez $x=\gamma_x^i(0)$ rýchlosťou $v_i(x)$, a krivka $\gamma_{-x}^i\colon\mathbb{R}\to S^m$, definovaná predpisom $\gamma_{-x}^i(t)=-\gamma_x^i(t)$, potom prechádza cez $-x$ rýchlosťou $v_i(-x)$.

Samozrejme, pre $i=1,2,\dots,k-1$ je vektor $w_i(x,z)$ rýchlosťou (v bode $t=0$) krivky

$\Gamma^i_{(x,z)}\colon \mathbb{R} \to S^m \times S^2$, $\Gamma^i_{(x,z)}(t) = (\gamma^i_x(t), z)$. Dostávame tak

$$\begin{aligned}\Psi(\Gamma^i_{(x,z)}(t)) &= \Psi(\gamma^i_x(t), z) = (-\gamma^i_x(t), \psi(z)) = (\gamma^i_{-x}(t), \psi(z)) = \\ &= \Gamma^i_{(-x,\psi(z))}(t) = \Gamma^i_{\Psi(x,z)}(t).\end{aligned}$$

Teda pre $i = 1, 2, \dots, k-1$ sú vektorové polia w_i naozaj ekvivariantné.

Vektor $w_k(x,z)$ je rýchlosťou (v bode $t = 0$) krivky $\Gamma^k_{(x,z)}\colon \mathbb{R} \to S^m \times S^2$, $\Gamma^k_{(x,z)}(t) = (\gamma^k_x(x_1 t), \beta_z(t))$, kde $\beta_z\colon \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ je krivka prechádzajúca cez $(x_1, x_2, x_3) = z = \beta_z(0) \in S^2$ rýchlosťou $(x_1^2 - 1, x_1x_2, x_1x_3)$. Inak povedané, $\frac{d\beta_z}{dt}(0) = (x_1^2 - 1, x_1x_2, x_1x_3)$. Pre každý bod $(x_1, x_2, x_3) = z \in S^2$ je vektor

$$\begin{aligned}\frac{d(\psi(\beta_z))}{dt}(0) &= d\psi(\beta_z(0)) \cdot \frac{d\beta_z}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3)^T = \\ &= (x_1^2, x_1x_2, -x_1x_3)^T = \frac{d\beta_{\psi(z)}}{dt}(0)\end{aligned}$$

rýchlosťou krivky $\psi(\beta_z(t))$ v bode $t = 0$. Teda vektorový tok na S^2 určený krivkami $\psi(\beta_z)$ generuje rovnaké vektorové pole ako vektorový tok určený krivkami $\beta_{\psi(z)}$. Preto nutne $\psi(\beta_z(t)) = \beta_{\psi(z)}(t)$, z čoho dostaneme

$$\begin{aligned}\Psi(\Gamma^k_{(x,z)}(t)) &= \Psi(\gamma^k_x(x_1 t), \beta_z(t)) = (-\gamma^k_x(x_1 t), \psi(\beta_z(t))) = \\ &= (\gamma^k_{-x}(x_1 t), \beta_{\psi(z)}(t)) = \Gamma^k_{(-x,\psi(z))}(t) = \Gamma^k_{\Psi(x,z)}(t).\end{aligned}$$

Vidíme teda, že aj w_k je ekvivariantné. Analogicky sa možno presvedčiť o ekvivariantnosti poľa w_{k+1}. □

Dôsledok 2.3.3. *Ak m je nepárne, tak* $\operatorname{span} P(m,1) \geq \operatorname{span} S^m + 1$.

Dôkaz. Je známe, že pre nepárne m na S^m existuje k všade lineárne nezávislých vektorových polí, pričom $k = \operatorname{span} S^m \geq 1$. Tieto polia navyše možno zvoliť tak, že budú „lineárne“, teda aj ekvivariantné vzhľadom na $x \sim -x$. Spojením 2.3.2 a 2.3.1 získame $k+1$ všade lineárne nezávislých vektorových polí na $P(m,1)$, teda $\operatorname{span} P(m,1) \geq k+1 = \operatorname{span} S^m + 1$. □

Kapitola 3

O duálnych Stiefelových-Whitneyho triedach niektorých Grassmannových variet – výsledky dizertácie

Pri skúmaní niektorých vlastností danej hladkej súvislej uzavretej variety M môže byť užitočné poznanie jej (totálnej) duálnej Stiefelovej-Whitneyho triedy, ktorú označujeme $\bar{w}(M)$. Ako sme uviedli v podkapitole 1.5, táto trieda je Stiefelovou-Whitneyho triedou normálovej fibrácie ľubovoľného vnorenia M do euklidovského priestoru. Podľa vety 1.5.4, ak je q-ta trieda $\bar{w}_q(M)$ nenulová, tak M nemožno vnoriť do $\mathbb{R}^{d+q-1}$ ani vložiť do $\mathbb{R}^{d+q}$, kde d je dimenzia M. Iným zaujímavým dôsledkom toho, že $\bar{w}_q(M) \neq 0$ (poz. [13, Veta 1.3]), je neexistencia $2t$-regulárneho zobrazenia z M do $\mathbb{R}^{t(d+1+q)}$, pričom t-regulárne zobrazenie je také spojité zobrazenie $f\colon X \to \mathbb{R}^N$, že $f(x_1), \dots, f(x_t)$ sú lineárne nezávislé nad $\mathbb{R}$ pre ľubovoľnú t-ticu $x_1, \dots, x_t$ navzájom rôznych bodov z X.

Nech $G_{n,k}$ je Grassmannova varieta neorientovaných k-rozmerných vektorových podpriestorov v $\mathbb{R}^n$; ako homogénny priestor, $G_{n,k} = O(n)/O(k) \times O(n-k)$. V doterajších prácach [46], [47], [16] možno nájsť výsledky o nenulovosti určitých duálnych Stiefelových-Whitneyho tried pre viaceré triedy variet $G_{n,k}$. V tejto kapitole odvodíme nové výsledky pre $k = 4$; sú obsiahnuté v práci Korbaš, Novotný [25].

Je známe (Borel [6]), že kohomologická algebra Grassmannovej variety, s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$, je daná predpisom

$$H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_k]/I_{n,k},$$

pričom $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ je totálna Stiefelova-Whitneyho trieda kanonickej k-rozmernej fibrácie γ nad $G_{n,k}$, $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \cdots + \bar{w}_{n-k}$ je totálna Stiefelova-Whitneyho trieda k nej ortogonálne komplementárnej fibrácie $\gamma^\perp$ dimenzie $n-k$ a $I_{n,k}$ je ideál generovaný homogénnymi zložkami výrazu $(1 + w_1 + \cdots + w_k)^{-1}$ v dimenziách $n-k+1, \ldots, n$. Tiež je dobre známe (napr. [18]), že $TG_{n,k} \oplus \gamma \otimes \gamma \cong n\gamma$. Použitím zrejmého vzťahu $\gamma \oplus \gamma^\perp \cong \varepsilon^n$, kde ε^n je triviálna n-rozmerná fibrácia, pre duálnu Stiefelovu-Whitneyho triedu variety $G_{n,k}$ dostávame

$$\bar{w}(G_{n,k}) = w(\gamma \otimes \gamma \oplus n\gamma^\perp) = w(\gamma \otimes \gamma) \cdot (1 + \bar{w}_1 + \cdots + \bar{w}_{n-k})^n. \tag{3.1}$$

Výpočty v kohomologickej algebre $H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ sú vo všeobecnosti veľmi zložité. Konkrétne výpočty niekedy uľahčujú Gröbnerove bázy, ako v práci [42]. Tu použijeme Stongovu metódu z článku [65]. Vychádzajúc z (3.1) ukážeme, že isté duálne Stiefelove-Whitneyho triedy Grassmannových variet $G_{2^s+2,4}$ a $G_{2^s+3,4}$ ($s \geq 3$) vo vysokej dimenzii nie sú nulové. Z práce [64] iba stručne pripomeňme niektoré fakty, ktoré budeme ďalej používať.

Fakt (a). *Kohomologická algebra* $H^*(\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_2)$, *pričom*

$$\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(1) \times \ldots \times O(1),$$

sa dá stotožniť so

$$\mathbb{Z}_2[e_1, \ldots, e_n] \Big/ \Big(\prod_{i=1}^{n}(1 + e_i) = 1\Big),$$

kde e_i *je prvá Stiefelova-Whitneyho trieda* i*-tej kanonickej lineárnej fibrácie nad „vlajkovou varietou“* $\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n)$.

Fakt (b). *Projekcia zrejmej fibrácie,* $\pi : \mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n) \to G_{n,k}$, *indukuje v kohomológiách monomorfizmus* $\pi^* \colon H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathrm{Flag}(n); \mathbb{Z}_2)$ *a máme*

$$\pi^*(w(\gamma)) = \prod_{i=1}^{k}(1 + e_i), \qquad \pi^*(w(\gamma^\perp)) = \prod_{i=k+1}^{n}(1 + e_i).$$

Fakt (c). *Hodnota kohomologickej triedy* $u \in H^*(G_{n,k})$ *na fundamentálnej homologickej triede* $G_{n,k}$ *je rovnaká ako hodnota* $\pi^*(u) \cdot e_1^{k-1} e_2^{k-2} \ldots e_{k-1} e_{k+1}^{n-k-1} e_{k+2}^{n-k-2} \ldots e_{n-1}$ *na fundamentálnej triede variety* $\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n)$.

Fakt (d). *Nenulové monómy v $H^{\mathrm{top}}(\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n))$ sú práve monómy tvaru*

$$e_{\sigma(1)}^{n-1} \dots e_{\sigma(i)}^{n-i} \dots e_{\sigma(n)}^{0},$$

t. j. monómy bez opakujúcich sa exponentov.

3.1 Výsledky

Pripomeňme najskôr známe výsledky z prác [47, 1(i)], [16, 4.1, 4.3].

Tvrdenie 3.1.1 (Oproiu; Hiller, Stong). *Ak $k \leq 2^{s-1} \leq n-k$ a $n \leq 2^s$, tak $\bar{w}_q(G_{n,k}) \neq$ $\neq 0$ pre $q = k(2^s + k - n - 1)$.*

Tvrdenie 3.1.2 (Hiller, Stong). *Ak $k \leq 2^{s-1}$ a $n = 2^s + 1$, tak $\bar{w}_q(G_{n,k}) \neq 0$ pre $q = 2^s + k^2 - 2k$.*

Z nich pre $k = 4$ dostávame tento dôsledok.

Dôsledok 3.1.3. *Nech $s \geq 3$.*

(i) *Ak $2^{s-1} + 4 \leq n \leq 2^s$, tak pre $q = 4 \cdot 2^s - 4n + 12$ je $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$;*

(ii) *Ak $n = 2^s$, tak pre $q = 12$ je $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$;*

(iii) *ak $n = 2^s + 1$, tak pre $q = 2^s + 8$ je $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$;*

(iv) *ak $n = 2^s + 4$, tak pre $q = 4 \cdot 2^s - 4$ je $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$.*

Dôkaz. Časť (i) dostaneme priamo z tvrdenia 3.1.1. Časť (ii) je špeciálny prípad časti (i). Časť (iii) dostaneme pre $s > 3$ z tvrdenia 3.1.2 a špeciálne pre $s = 3$ platí $\bar{w}_{16}(G_{9,4}) \neq 0$ vďaka poznatku $\bar{w}_{k^2}(G_{2k+1,k}) \neq 0$, ktorý je odvodený v [16]. Časť (iv) je špeciálny prípad časti (i); stačí namiesto s dosadiť $s + 1$. □

Doteraz známe výsledky nepokrývajú prípady $n = 2^s + 2$ a $n = 2^s + 3$. Pre ne dokážeme nasledovnú vetu (ako hypotézu ju sformuloval profesor Koichi Iwata a oboznámil s ňou J. Korbaša počas svojej návštevy v Bratislave v roku 1996).

Veta 3.1.4. *Nech* $s \geq 3$.

(i) *Ak* $n = 2^s + 2$, *tak pre* $q = 2 \cdot 2^s + 4$ *je* $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$;

(ii) *ak* $n = 2^s + 3$, *tak pre* $q = 3 \cdot 2^s$ *je* $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$.

Poznámky. Ak urobíme druhú vonkajšiu mocninu rovnosti $\gamma \oplus \gamma^\perp = \varepsilon^{10}$ nad $G_{10,4}$, ľahko vidíme, že $TG_{10,4} \oplus \lambda^2(\gamma) \oplus \lambda^2(\gamma^\perp) = \varepsilon^{45}$, teda $G_{10,4}$ možno vnoriť do $\mathbb{R}^{45}$. Na druhej strane, z vety 3.1.4(i) vyplýva, že $G_{10,4}$ nemožno vnoriť do $\mathbb{R}^{43}$. Všeobecnejšie, $G_{2^s+2,4}$ nemožno vnoriť do $\mathbb{R}^{6 \cdot 2^s - 5}$ a $G_{2^s+3,4}$ nemožno vnoriť do $\mathbb{R}^{7 \cdot 2^s - 5}$ pre $s \geq 3$. Ako vidíme, pre $s = 3$ tento výsledok o nevnoriteľnosti nemožno zlepšiť viac ako o 1, a je lepší ako výsledok vyplývajúci z [38, 5.1], dosiahnutý inými metódami. Pre $s > 3$ je výsledok z [38] o nevnoriteľnosti lepší, ale náš výsledok $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$ poskytuje zaujímavú geometrickú informáciu o normálovej fibrácii ľubovoľného vnorenia $G_{n,4}$ do euklidovského priestoru (ktorú [38] neposkytuje).

Ďalším dôsledkom nášho výsledku je neexistencia $2t$-regulárneho zobrazenia z $G_{2^s+2,4}$ do $\mathbb{R}^{3t(2^{s+1}-1)}$, resp. z $G_{2^s+3,4}$ do $\mathbb{R}^{t(7 \cdot 2^s - 3)}$. Pritom je známe (poz. [13]), že existuje $2t$-regulárne zobrazenie z $G_{2^s+2,4}$ do $\mathbb{R}^{2t(2^{s+2}-7)+1}$, resp. z $G_{2^s+3,4}$ do $\mathbb{R}^{2t(2^{s+2}-3)+1}$.

3.2 Dôkaz vety 3.1.4

Dôkaz časti (i). Aby sme dokázali, že pre $q = 2^{s+1} + 4$ je $\bar{w}_q(G_{2^s+2,4}) \neq 0$, stačí ukázať, že nenulová je kohomologická trieda

$$\bar{w}_q(G_{2^s+2,4}) \cdot w_2^{2^s-8} w_4 \tag{3.2.1}$$

v najvyššej nenulovej kohomologickej grupe $H^{\mathrm{top}}(G_{2^s+2,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Podľa [64, Lemma 1, str. 107] je hodnota (3.2.1) taká istá (nulová alebo nenulová) ako hodnota

$$i^* \left(\bar{w}_q(G_{2^s+2,4}) \cdot w_2^{2^s-8} \right) \tag{3.2.2}$$

v $H^{\mathrm{top}}(G_{2^s+1,4}; \mathbb{Z}_2)$, pričom $i\colon G_{2^s+1,4} \to G_{2^s+2,4}$ je inklúzia indukovaná štandardným vložením $\mathbb{R}^{2^s+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2^s+2}$. Keďže $i^*(\gamma) = \gamma$ a $i^*(\gamma^\perp) = \gamma^\perp \oplus \varepsilon^1$, s využitím (3.1) môžeme (3.2.2) prepísať na

$$\begin{aligned} i^* \left(w_q(\gamma \otimes \gamma \oplus (2^s+2)\gamma^\perp) \cdot w_2^{2^s-8} \right) &= \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma^\perp)^{2^s+2} \right]_q \cdot w_2^{2^s-8} = \\ &= \left[w(\gamma \otimes \gamma)(1 + \bar{w}_1^{2^s} + \cdots + \bar{w}_{2^s-3}^{2^s}) w(\gamma^\perp)^2 \right]_q \cdot w_2^{2^s-8}. \end{aligned}$$

Budeme potrebovať nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lema. *Pre* $k \geq 2$ *v* $H^*(G_{2^s+1,4};\mathbb{Z}_2)$ *je* $\bar{w}_k^{2^s} = 0$.

Dôkaz lemy. Stačí ukázať, že $\bar{w}_k^{2^s} \cdot x = 0$ pre každé x také, že $\bar{w}_k^{2^s} \cdot x \in H^{\mathrm{top}}(G_{2^s+1,4};\mathbb{Z}_2)$. Ako vieme (poz. fakt (c)), na to stačí ukázať nulovosť

$$\pi^*(\bar{w}_k^{2^s} \cdot x) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-4} e_6^{2^s-5} \dots e_{2^s-1}^2 e_{2^s} \tag{3.2.3}$$

v $H^{\mathrm{top}}(\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^{2^s+1});\mathbb{Z}_2)$. Pritom $\pi^*(\bar{w}_k^{2^s})$ je 2^s-tá mocnina k-tej elementárnej symetrickej funkcie v premenných $e_5, e_6, \dots, e_{2^s+1}$. Keďže $k \geq 2$, vo vyjadrení (3.2.3) bude v každom monóme $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_{2^s+1}^{i_{2^s+1}}$ aspoň jedno e_j s exponentom $i_j \geq 2^s + 1$, a teda (poz. fakt (d) alebo [64, Corollary, str. 106]) trieda (3.2.3) je nulová. □

Použitím predchádzajúcej lemy a rovnosti $\bar{w}_1 = w_1$ môžeme (3.2.2) prepísať na

$$\begin{aligned} &i^*\left(\bar{w}_q(G_{2^s+2,4}) \cdot w_2^{2^s-8}\right) = \left[w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1^{2^s})w(\gamma^\perp)^2\right]_q \cdot w_2^{2^s-8} = \\ &= \left[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2\right]_q \cdot w_2^{2^s-8} + \left[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2 w_1^{2^s}\right]_q \cdot w_2^{2^s-8}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Dokážeme ďalšie pomocné tvrdenie.

Lema. *V* $H^*(G_{2^s+1,4};\mathbb{Z}_2)$ *máme*

$$\left[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2 w_1^{2^s}\right]_{2^{s+1}+4} \cdot w_2^{2^s-8} = 0.$$

Dôkaz lemy. Chceme vlastne dokázať nulovosť

$$\left[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2\right]_{2^s+4} \cdot w_1^{2^s} \cdot w_2^{2^s-8}. \tag{3.2.5}$$

Použijeme inklúziu $\tilde{i}\colon G_{2^s-1,3} \to G_{2^s+1,4}$, ktorú dostaneme ako zloženie $\tilde{i} = l \circ j$, kde inklúzie $j\colon G_{2^s-1,3} \to G_{2^s,3}$, $l\colon G_{2^s,3} \to G_{2^s+1,4}$ sú „štandardné“, teda také, že $j^*(\gamma) = \gamma$, $j^*(\gamma^\perp) = \gamma^\perp \oplus \varepsilon^1$, $l^*(\gamma) = \gamma \oplus \varepsilon^1$, $l^*(\gamma^\perp) = \gamma^\perp$. Preto máme $\tilde{i}^*(\gamma) = \gamma \oplus \varepsilon$, $\tilde{i}^*(\gamma^\perp) = \gamma^\perp \oplus \varepsilon$, a tiež $\tilde{i}^*(w_k) = w_k$, $\tilde{i}^*(\bar{w}_k) = \bar{w}_k$ pre všetky k. Z práce [64, Lemma 3, str. 108] vieme, že hodnota

(3.2.5) je taká istá ako hodnota

$$\tilde{i}^*\Big(\big[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2\big]_{2^s+4}\cdot w_2^{2^s-8}\Big)=\big[w\left((\gamma\oplus\varepsilon^1)\otimes(\gamma\oplus\varepsilon^1)\right)w(\gamma^\perp)^2\big]_{2^s+4}\cdot w_2^{2^s-8}=$$
$$=\big[w(\gamma\otimes\gamma)\underbrace{w(\gamma)^2w(\gamma^\perp)^2}_{=1}\big]_{2^s+4}\cdot w_2^{2^s-8}=[w(\gamma\otimes\gamma)]_{2^s+4}\cdot w_2^{2^s-8}.$$

Ale fibrácia $\gamma\otimes\gamma$ je 9-rozmerná, a teda $w_{2^s+4}(\gamma\otimes\gamma)=0$ (máme $s\geq 3$), z čoho vyplýva tvrdenie lemy. □

Vďaka predchádzajúcej leme je druhá časť v (3.2.4) nulová. Na dôkaz nenulovosti (3.2.2) teda potrebujeme už len ukázať, že trieda

$$\big[w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma^\perp)^2\big]_q\cdot w_2^{2^s-8}=\big[w(\gamma\otimes\gamma)(1+\bar{w}_1^2+\cdots+\bar{w}_{2^s-3}^2)\big]_q\cdot w_2^{2^s-8} \tag{3.2.6}$$

je nenulová v $H^*(G_{2^s+1,4};\mathbb{Z}_2)$.

Z prác [5], [30] vieme, že

$$w(\gamma\otimes\gamma)=1+w_1^2+w_1^4+w_1^6+(w_1^2w_3^2+w_2^4)+(w_1^2w_2^4+w_1^4w_3^2)+(w_1^4w_4^2+w_1^2w_2^2w_3^2+w_3^4).$$

Samozrejme trieda $w_j(\gamma\otimes\gamma)(1+\bar{w}_1^2+\cdots+\bar{w}_{2^s-3}^2)$ je pre $j\leq 8$ nulová v dimenzii $q=2^{s+1}+4$, a teda (3.2.6) môžeme ďalej upraviť na

$$w_2^{2^s-8}\left(w_{10}(\gamma\otimes\gamma)\bar{w}_{2^s-3}^2+w_{12}(\gamma\otimes\gamma)\bar{w}_{2^s-4}^2\right)=$$
$$=(w_1^2w_2^{2^s-4}+w_1^4w_2^{2^s-8}w_3^2)\bar{w}_{2^s-3}^2+(w_1^4w_2^{2^s-8}w_4^2+w_1^2w_2^{2^s-6}w_3^2+w_2^{2^s-8}w_3^4)\bar{w}_{2^s-4}^2.$$

Ukážeme, že tento výraz je nenulový. Urobíme to v dvoch krokoch (s použitím faktu (c) alebo [64, Observation, str. 106]).

Krok (a). Ukážeme, že

$$A:=\pi^*\left((w_1^2w_2^{2^s-4}+w_1^4w_2^{2^s-8}w_3^2)\bar{w}_{2^s-3}^2\right)e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-4}e_6^{2^s-5}\dots e_{2^s}^1\neq 0.$$

Krok (b). Ukážeme, že

$$B:=\pi^*\left((w_1^4w_2^{2^s-8}w_4^2+w_1^2w_2^{2^s-6}w_3^2+w_2^{2^s-8}w_3^4)\bar{w}_{2^s-4}^2\right)e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-4}e_6^{2^s-5}\dots e_{2^s}^1=0.$$

Krok (a). Keďže $\pi^*(\bar{w}_{2^s-3}^2) = e_5^2 e_6^2 \dots e_{2^s+1}^2$, máme

$$A = \pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-4} + w_1^4 w_2^{2^s-8} w_3^2) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2.$$

Pripomeňme, že

$$\begin{aligned}
\pi^*(w_1) &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\
\pi^*(w_2) &= e_1e_2 + e_1e_3 + e_1e_4 + e_2e_3 + e_2e_4 + e_3e_4, \\
\pi^*(w_3) &= e_1e_2e_3 + e_1e_2e_4 + e_1e_3e_4 + e_2e_3e_4, \\
\pi^*(w_4) &= e_1e_2e_3e_4.
\end{aligned}$$

Vo vyjadrení $A_1 := \pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-4}) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2$ pomocou $e_1, e_2, \dots, e_{2^s+1}$ (všimnime si, že $e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2$ bude v každom monóme tohto vyjadrenia presne v tejto podobe) môžu byť nenulové len tie monómy, ktoré neobsahujú činiteľ e_4, kým e_3 majú v prvej mocnine. „Príspevok“ z $\pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-4})$ k nenulovým monómom teda nesmie obsahovať e_3 ani e_4. Odtiaľ

$$\begin{aligned}
A_1 &= (e_1 + e_2)^2 (e_1e_2)^{2^s-4} e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2 = \\
&= \underbrace{e_1^{2^s+1} e_2^{2^s-2} e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2}_{=0} + \underbrace{e_1^{2^s-1} e_2^{2^s} e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2}_{\neq 0} \neq 0.
\end{aligned}$$

Druhú časť výrazu A tvorí vyjadrenie

$$\begin{aligned}
A_2 :=& \pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_3^2) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2 = \\
=& \pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8})(e_1^2e_2^2e_3^2 + e_1^2e_2^2e_4^2 + e_1^2e_3^2e_4^2 + e_2^2e_3^2e_4^2) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2.
\end{aligned}$$

Vidno, že každý monóm alebo obsahuje e_4 (a teda neobsahuje žiadne e_j s exponentom 0), alebo obsahuje e_3 s exponentom väčším ako 1 (a teda neobsahuje žiadne e_j s exponentom 1). Preto $A_2 = 0$, čím sme dokázali, že $A = A_1 + A_2 \neq 0$. □

Krok (b). Keďže

$$\begin{aligned}
\pi^*(\bar{w}_{2^s-4}^2) = & e_5^2 e_6^2 \dots e_{2^s}^2 + e_5^2 e_6^2 \dots e_{2^s-1}^2 e_{2^s+1}^2 + e_5^2 e_6^2 \dots e_{2^s-2}^2 e_{2^s}^2 e_{2^s+1}^2 + \\
& + e_5^2 e_6^2 \dots e_{2^s-3}^2 e_{2^s-1}^2 e_{2^s}^2 e_{2^s+1}^2 + \dots + e_5^2 e_7^2 \dots e_{2^s}^2 e_{2^s+1}^2 + e_6^2 e_7^2 \dots e_{2^s}^2 e_{2^s+1}^2,
\end{aligned}$$

máme

$$\begin{aligned}
&B = \pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_4^2 + w_1^2 w_2^{2^s-6} w_3^2 + w_2^{2^s-8} w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 \cdot \\
&\cdot \big(e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 + e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s-1}^4 e_{2^s}^1 e_{2^s+1}^2 + \\
&+ e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s-2}^5 e_{2^s-1}^{\boxed{2}} e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^{\boxed{2}} + e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s-3}^6 e_{2^s-2}^{\boxed{3}} e_{2^s-1}^4 e_{2^s}^{\boxed{3}} e_{2^s+1}^2 + \cdots \\
&\cdots + e_5^{2^s-2} e_6^{\boxed{2^s-5}} e_7^{2^s-4} e_8^{\boxed{2^s-5}} e_9^{2^s-6} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2 + e_5^{\boxed{2^s-4}} e_6^{2^s-3} e_7^{\boxed{2^s-4}} e_8^{2^s-5} \dots e_{2^s}^3 e_{2^s+1}^2 \big).
\end{aligned}$$

Po vyjadrení $\pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_4^2 + w_1^2 w_2^{2^s-6} w_3^2 + w_2^{2^s-8} w_3^4)$ pomocou e_1, e_2, e_3, e_4 sa časti monómov obsahujúce mocniny $e_5, e_6, \dots, e_{2^s+1}$ nezmenia, a teda k nenulovým monómom môžu prispieť len prvé dva sčítance z veľkej zátvorky vo vyjadrení B – v ostatných sú niektoré z exponentov dvakrát. Preto máme

$$\begin{aligned}
B = &\underbrace{\pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_4^2 + w_1^2 w_2^{2^s-6} w_3^2 + w_2^{2^s-8} w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3}_{:=B_1} + \\
&+ \underbrace{\pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_4^2 + w_1^2 w_2^{2^s-6} w_3^2 + w_2^{2^s-8} w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s-1}^4 e_{2^s}^1 e_{2^s+1}^2}_{:=B_2}.
\end{aligned}$$

Nenulový monóm vo vyjadrení B_1 musí samozrejme obsahovať e_3 v prvej mocnine. Preto všetky monómy pochádzajúce z vyjadrenia

$$\pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8} w_4^2) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 = \pi^*(w_1^4 w_2^{2^s-8}) e_1^2 e_2^2 e_3^2 e_4^2 e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3$$

budú nulové. Pre tú istú príčinu budú kandidátmi na nenulové monómy pochádzajúce z $\pi^*(w_2^{2^s-8} w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3$ iba tie, ktoré vzniknú z

$$(e_1 e_2 + e_1 e_4 + e_2 e_4)^{2^s-8} e_1^4 e_2^4 e_4^4 \cdot e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3.$$

V každom z nich je však e_4 s exponentom, ktorý je rovnaký ako niektorý z exponentov v časti $e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3$ (lebo e_4 má exponent j spĺňajúci $4 \le j \le 2^s - 4$). Preto $\pi^*(w_2^{2^s-8} w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 = 0$.

Aj tretia časť výrazu B_1, ktorá má tvar $\pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-6} w_3^2) e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3$, môže mať nenulové monómy len s e_3 v prvej mocnine. Tie môžu pochádzať iba z vyjadrenia

$$\pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-6}) e_1^2 e_2^2 e_4^2 \cdot e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3 = \pi^*(w_1^2 w_2^{2^s-6}) e_1^5 e_2^4 e_3 e_4^2 e_5^{2^s-2} e_6^{2^s-3} \dots e_{2^s}^3.$$

V tomto nenulové monómy musia obsahovať $e_3e_4^2$ (iným spôsobom exponenty 1 a 2 „nevyrobíme“), a teda kandidátmi na nenulové monómy sú iba tie dva, ktoré získame z vyjadrenia

$$\begin{aligned}&(e_1+e_2)^2(e_1e_2)^{2^s-6}e_1^5e_2^4e_3e_4^2e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s}^3 =\\ &= \underbrace{e_1^{2^s+1}e_2^{2^s-2}e_3e_4^2e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s}^3}_{=0} + \underbrace{e_1^{2^s-1}e_2^{2^s}e_3e_4^2e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s}^3}_{\neq 0} \neq 0.\end{aligned}$$

Teda $B_1 \neq 0$.

Teraz vypočítame hodnotu B_2. Je jasné, že nenulový monóm v jeho vyjadrení nesmie obsahovať e_4 (lebo obsahuje všetky ostatné e_j). Takže príspevok

$$\begin{aligned}&\pi^*(w_1^4w_2^{2^s-8}w_4^2)e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2 =\\ &= \pi^*(w_1^4w_2^{2^s-8})e_1^2e_2^2e_3^2e_4^2\cdot e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2\end{aligned}$$

je nulový. Aj príspevok $\pi^*(w_2^{2^s-8}w_3^4)e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2$ je nulový. Jeho nenulové monómy by totiž mohli pochádzať iba z

$$\begin{aligned}&\pi^*(w_2^{2^s-8})e_1^4e_2^4e_3^4\cdot e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2 =\\ &= \pi^*(w_2^{2^s-8})e_1^7e_2^6e_3^5e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2,\end{aligned}$$

ale v tomto výraze v každom monóme bude chýbať e_j s exponentom 3, teda každý monóm je nulový. Napokon zostáva $\pi^*(w_1^2w_2^{2^s-6}w_3^2)e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2$. Keďže nenulové monómy tu nesmú obsahovať e_4, môžu pochádzať len z

$$\begin{aligned}&\pi^*(w_1^2w_2^{2^s-6})e_1^2e_2^2e_3^2\cdot e_1^3e_2^2e_3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2 =\\ &= \pi^*(w_1^2w_2^{2^s-6})e_1^5e_2^4e_3^3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2.\end{aligned}$$

Exponent 3 tu môžeme získať len pri e_3, a teda kandidátmi na nenulové monómy sú iba tie dva, ktoré dostaneme z vyjadrenia

$$\begin{aligned}&(e_1+e_2)^2(e_1e_2)^{2^s-6}e_1^5e_2^4e_3^3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2 =\\ &= \underbrace{e_1^{2^s+1}e_2^{2^s-2}e_3^3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2}_{=0} + \underbrace{e_1^{2^s-1}e_2^{2^s}e_3^3e_5^{2^s-2}e_6^{2^s-3}\dots e_{2^s-1}^4e_{2^s}^1e_{2^s+1}^2}_{\neq 0} \neq 0.\end{aligned}$$

Teda $B_2 \neq 0$. Dostávame teda $B = B_1 + B_2 = 0$. □

Ukázali sme, že výraz (3.2.2) má hodnotu $A+B \neq 0$, teda aj výraz (3.2.1) je nenulový, čím je časť (i) vety 3.1.4 dokázaná.

Dôkaz časti (ii). Aby sme dokázali, že pre $q = 3 \cdot 2^s$ je $\bar{w}_q(G_{2^s+3,4}) \neq 0$, stačí ukázať, že nenulová je kohomologická trieda

$$\bar{w}_q(G_{2^s+3,4}) \cdot w_1^{2^s-8} w_4 \tag{3.2.7}$$

v najvyššej nenulovej kohomologickej grupe $H^{\mathrm{top}}(G_{2^s+3,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Rovnako ako pri dôkaze časti (i) dostaneme, že hodnota (3.2.7) je taká istá (nulová alebo nenulová) ako hodnota

$$V := i^* \left(\bar{w}_q(G_{2^s+3,4}) \cdot w_1^{2^s-8}\right) = \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma^\perp)^{2^s+3}\right]_q \cdot w_1^{2^s-8} \tag{3.2.8}$$

v $H^{\mathrm{top}}(G_{2^s+2,4}; \mathbb{Z}_2)$. Keďže $\dim(G_{2^s+2,4}) = 4(2^s-2) < 2 \cdot 2^{s+1}$, máme $w_i^{2^{s+1}} = 0$ pre $i = 2, 3, 4$. Podľa [64] však v $G_{2^s+2,4}$ máme $\mathrm{height}(w_1) = 2^{s+1} - 1$, čiže aj $w_1^{2^{s+1}} = 0$ a $w(\gamma)^{2^{s+1}} = (1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^{2^{s+1}} = 1$. Môžeme teda prepísať (3.2.8) na

$$\begin{aligned} V &= \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma^\perp)^{2^s+3}\right]_q \cdot w_1^{2^s-8} = \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma^\perp)^{2^s+3} w(\gamma)^{2^{s+1}}\right]_q \cdot w_1^{2^s-8} = \\ &= \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma)^{2^s-3}\right]_q \cdot w_1^{2^s-8} = \left[w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma) \cdot \prod_{i=2}^{s-1} w(\gamma)^{2^i}\right]_q \cdot w_1^{2^s-8}. \end{aligned}$$

Označme $P := w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma) \cdot \prod_{i=2}^{s-2} w(\gamma)^{2^i}$ (pre $s = 3$ definujeme $\prod_{i=2}^{1} w(\gamma)^{2^i} = 1$ a podobne aj ďalej $\prod_{i=p}^{r} f(i) = 1$ vždy pre $p > r$). Berúc do úvahy hodnotu $q = 3 \cdot 2^s$, môžeme po roznásobení výrazom $w(\gamma)^{2^{s-1}} = 1 + w_1^{2^{s-1}} + w_2^{2^{s-1}} + w_3^{2^{s-1}} + w_4^{2^{s-1}}$ ďalej písať

$$\begin{aligned} V = {} & \underbrace{[P]_{3 \cdot 2^s} \cdot w_1^{2^s-8}}_{:=A} + \underbrace{[P]_{5 \cdot 2^{s-1}} \cdot w_1^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8}}_{:=B} + \underbrace{[P]_{2^{s+1}} \cdot w_2^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8}}_{:=C} + \\ & + \underbrace{[P]_{3 \cdot 2^{s-1}} \cdot w_3^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8}}_{:=D} + \underbrace{[P]_{2^s} \cdot w_4^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8}}_{:=E}. \end{aligned}$$

Keďže maximálna dimenzia triedy vo $w(\gamma \otimes \gamma)$ je 12, najväčšia možná dimenzia nenulového komponentu v P je $12 + 4 + 4(4 + 8 + \cdots + 2^{s-2}) = 2^{s+1}$. Preto $[P]_{3 \cdot 2^s} = [P]_{5 \cdot 2^{s-1}} = 0$, t. j. $A = B = 0$. V ďalšom postupne vypočítame hodnoty C, D, E. Budeme opäť používať fakt (c). Keďže V je vyjadrený len pomocou tried w_1, w_2, w_3, w_4, hodnota π^* na triedach u, ktoré tvoria V, bude vyjadrená monómami, ktoré obsahujú iba e_1, e_2, e_3, e_4. Takže v $\pi^*(u) \cdot$ $\cdot\, e_1^3 e_2^2 e_3 e_5^{2^s-3} e_6^{2^s-4} \ldots e_{2^s+1}$ budú nenulové práve tie monómy, ktorých exponenty pri e_1, e_2,

e_3, e_4 tvoria (v nejakom poradí) štvoricu 2^s-2, 2^s-1, 2^s, 2^s+1. Ako sme práve odvodili, 2^{s+1} je najväčšia možná dimenzia triedy v P. Preto $[P]_{2^{s+1}} = w_{12}(\gamma\otimes\gamma)\cdot w_4^{1+4+8+\dots+2^{s-2}}$, a keďže $w_{12}(\gamma\otimes\gamma) = w_1^4w_4^2 + w_1^2w_2^2w_3^2 + w_3^4$, dostávame

$$
\begin{aligned}
C &= (w_1^4w_4^2 + w_1^2w_2^2w_3^2 + w_3^4)w_4^{2^{s-1}-3}w_2^{2^{s-1}}w_1^{2^s-8} = \\
&= \underbrace{w_1^{2^s-4}w_2^{2^{s-1}}w_4^{2^{s-1}-1}}_{:=C_1} + \underbrace{w_1^{2^s-6}w_2^{2^{s-1}+2}w_3^2w_4^{2^{s-1}-3}}_{:=C_2} + \underbrace{w_1^{2^s-8}w_2^{2^{s-1}}w_3^4w_4^{2^{s-1}-3}}_{:=C_3}.
\end{aligned}
$$

Máme

$$
\begin{aligned}
\pi^*(C_1)e_1^3e_2^2e_3 &= (e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-4}(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot \\
&\cdot (e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}-1}e_1^3e_2^2e_3 = e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^{s-1}+1}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-4}\cdot \\
&\cdot \big((e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)\big)^{2^{s-1}} = \\
&= e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^{s-1}+1}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-4}\cdot \\
&\cdot \Big(\sum e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}} + (e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\Big).
\end{aligned}
$$

Z poslednej zátvorky nemôže k nenulovým monómom prispieť žiadny člen $e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}}$, lebo exponent e_i by bol aspoň $2^s + 2^{s-1} - 1 > 2^s + 1$. Rovnako nemôže prispieť ani žiadny z členov $e_1^{2^{s-1}}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$, lebo exponent e_1 by bol aspoň $2^{s-1}+2^{s-1}+2 > 2^s+1$. Stačí teda sledovať výraz

$$
\begin{aligned}
& e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^{s-1}+1}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-4}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} = \\
&= e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^s+1}e_3^{2^s}e_4^{2^s-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-4}.
\end{aligned}
$$

Aby vznikol nenulový monóm, exponenty tried e_2, e_3, e_4 už príspevkom s poslednej zátvorky nesmieme zvýšiť. Dostaneme tak jediný monóm

$$
e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^s+1}e_3^{2^s}e_4^{2^s-1}\cdot e_1^{2^{s-1}-4} = e_1^{2^s-2}e_2^{2^s+1}e_3^{2^s}e_4^{2^s-1},
$$

ktorý je po vynásobení $e_5^{2^s-3}e_6^{2^s-4}\dots e_{2^s+1}$ naozaj nenulový. Takže $C_1 \neq 0$.

Podobne môžeme písať

$$\pi^*(C_2)e_1^3e_2^2e_3 = (e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-6}(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)^{2^{s-1}+2}\cdot$$
$$\cdot(e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+e_1e_3e_4+e_2e_3e_4)^2(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}-3}e_1^3e_2^2e_3 =$$
$$= e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}-1}e_3^{2^{s-1}-2}e_4^{2^{s-1}-3}\cdot\prod_{i=3}^{s-1}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)\cdot$$
$$\cdot(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\cdot$$
$$\cdot(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_3^2+e_2^2e_4^2+e_3^2e_4^2)(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2).$$

Uvažujme prípad $s > 3$. Členy tvaru $e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}}$, ktoré získame zo súčinu dvoch zátvoriek $(\sum e_i^{2^{s-1}})\cdot(\sum e_i^{2^{s-1}}e_j^{2^{s-1}})$, vytvoria iba nulové monómy (exponent pri e_i v nich totiž bude aspoň $2^s+2^{s-1}-3 > 2^s+1$). Okrem takých vzniknú v uvedenom súčine iba členy tvaru $e_i^{2^{s-1}}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$ s rôznymi i, j, k, každý taký člen vznikne trikrát. Počítajúc nad $\mathbb{Z}_2$ teda ostáva (pre $s > 3$) preskúmať výraz

$$e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}-1}e_3^{2^{s-1}-2}e_4^{2^{s-1}-3}\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)\cdot$$
$$\cdot(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_3^2+e_2^2e_4^2+e_3^2e_4^2)(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2)\cdot$$
$$\cdot(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}).$$

Uvažujme monóm, do ktorého z poslednej zátvorky prispejeme tým zo štyroch členov, ktorý neobsahuje $e_i^{2^{s-1}}$ (kde $i \in \{1,2,3,4\}$). Ak $i = 1$, bude taký monóm obsahovať triedu e_i s exponentom nanajvýš $2^{s-1}+8+16+\cdots+2^{s-2}+2+2+2 = 2^s-2$, a ak $i \neq 1$, bude exponent e_i ešte menší. Avšak 2^s-2 je minimálna možná hodnota exponentu, aby monóm mohol byť nenulový. Aby teda uvedený monóm mohol byť nenulový, musí byť $i =$ $= 1$ a zároveň zo všetkých ostatných zátvoriek musíme prispieť členom, ktorý obsahuje e_1. K nenulovým monómom teda prispeje iba výraz

$$e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}-1}e_3^{2^{s-1}-2}e_4^{2^{s-1}-3}\cdot\prod_{i=3}^{s-2}e_1^{2^i}\cdot e_1^2\cdot(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_1^2e_4^2)\cdot$$
$$\cdot(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2)\cdot e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} =$$
$$= e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-1}e_3^{2^s-2}e_4^{2^s-3}(e_2^2+e_3^2+e_4^2)(e_2^2e_3^2+e_2^2e_4^2+e_3^2e_4^2).$$

Ľahko možno nahliadnuť, že z deviatich monómov, ktoré takto vzniknú, sú nenulové práve štyri. Takže $C_2 = 0$.

V prípade $s = 3$ máme (používajúc skrátený zápis pre symetrické polynómy a počítajúc nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{aligned}
\pi^*(C_2)e_1^3e_2^2e_3 &= e_1^4e_2^3e_3^2e_4(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)(e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_1^4e_4^4+e_2^4e_3^4+e_2^4e_4^4+e_3^4e_4^4)\cdot\\
&\cdot(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_3^2+e_2^2e_4^2+e_3^2e_4^2)(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2) =\\
&= e_1^4e_2^3e_3^2e_4\cdot\sum e_i^2\cdot\sum e_i^4e_j^4\cdot\sum e_i^2e_j^2\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2 =\\
&= e_1^4e_2^3e_3^2e_4\big(\sum e_i^6e_j^4+\sum e_i^4e_j^4e_k^2\big)\cdot\sum e_i^2e_j^2\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2 =\\
&= e_1^4e_2^3e_3^2e_4\big(\sum e_i^8e_j^6+\sum e_i^8e_j^4e_k^2+\sum e_i^6e_j^4e_k^2e_l^2+\sum e_i^6e_j^6e_k^2+\sum e_i^4e_j^4e_k^4e_l^2\big)\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2 =\\
&= e_1^4e_2^3e_3^2e_4\big(\sum e_i^{10}e_j^8e_k^2+\sum e_i^{10}e_j^6e_k^2e_l^2+\sum e_i^{10}e_j^6e_k^4+\sum e_i^8e_j^6e_k^4e_l^2+\sum e_i^8e_j^4e_k^4e_l^4+\\
&\qquad+\sum e_i^8e_j^8e_k^4+\sum e_i^6e_j^6e_k^6e_l^2\big).
\end{aligned}$$

Monóm so štvoricou exponentov 6, 7, 8, 9 nemôže vzniknúť z prvých troch sčítancov v zátvorke. Zo štvrtého sčítanca vznikne jedine pre $(i,j,k,l) = (4,3,2,1)$. Z piateho vznikne jedine pre $i = 4$. Zo šiesteho nevznikne žiadny. Zo siedmeho vznikne jedine pre $l = 1$. Spolu teda vznikne nepárne veľa nenulových monómov, čiže v tomto prípade $C_2 \neq 0$.

Napokon máme

$$\begin{aligned}
\pi^*(C_3)e_1^3e_2^2e_3 &= (e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-8}(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot\\
&\cdot(e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+e_1e_3e_4+e_2e_3e_4)^4(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}-3}e_1^3e_2^2e_3 =\\
&= e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}-1}e_3^{2^{s-1}-2}e_4^{2^{s-1}-3}\cdot\prod_{i=3}^{s-1}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot\\
&\cdot(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\cdot\\
&\cdot(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4).
\end{aligned}$$

Ak $s > 3$, zo súčinu zátvoriek $(\sum e_i^{2^{s-1}})\cdot(\sum e_i^{2^{s-1}}e_j^{2^{s-1}})$ stačí rovnako ako pri C_2 brať do úvahy iba členy tvaru $e_i^{2^{s-1}}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$ s rôznymi i, j, k a ďalej skúmať len výraz

$$\begin{aligned}
&e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}-1}e_3^{2^{s-1}-2}e_4^{2^{s-1}-3}\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4)\cdot\\
&\cdot(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}).
\end{aligned}$$

Z neho však vzniknú len nulové monómy, lebo každý člen v súčine posledných dvoch zátvoriek obsahuje aspoň dve e_i s exponentom $2^{s-1}+4$, a teda aspoň jedno e_i bude mať v každom monóme exponent nie menší ako $2^{s-1}+4+2^{s-1}-2=2^s+2$. Takže $C_3=0$.

V prípade $s=3$ máme

$$\pi^*(C_3)e_1^3e_2^2e_3 = e_1^4e_2^3e_3^2e_4(e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_1^4e_4^4+e_2^4e_3^4+e_2^4e_4^4+e_3^4e_4^4)\cdot \\ \cdot(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4).$$

Každý člen, ktorý vznikne zo súčinu zátvoriek, má niektoré e_i s exponentom 8. Ak $i\neq 4$, z takého člena vznikne nulový monóm (lebo vtedy e_i má v monóme exponent aspoň 10). Nenulové monómy teda môžu vzniknúť iba z

$$e_1^4e_2^3e_3^2e_4(e_1^4e_4^4\cdot e_2^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_4^4\cdot e_1^4e_3^4e_4^4+e_3^4e_4^4\cdot e_1^4e_2^4e_4^4)=3e_1^8e_2^7e_3^6e_4^9.$$

Vzniknú teda tri nenulové monómy, čiže v tomto prípade $C_3\neq 0$.

Spolu dostávame (či už $s=3$, alebo $s>3$), že $C=C_1+(C_2+C_3)=C_1+0\neq 0$.

Teraz vypočítame hodnotu D. Predpokladajme najprv, že $s>3$. Máme

$$\begin{aligned}\pi^*(D)e_1^3e_2^2e_3 &= e_1^3e_2^2e_3(e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+e_1e_3e_4+e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot \\ &\cdot(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-8}\pi^*([P]_{3\cdot 2^{s-1}}) = \\ &= e_1^3e_2^2e_3(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\cdot \\ &\cdot(e_1^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}+e_3^{2^{s-1}}+e_4^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot\pi^*([P]_{3\cdot 2^{s-1}}).\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Z prvých dvoch zátvoriek vzniknú štyri rovnaké členy $(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}$, ktoré nad $\mathbb{Z}_2$ nemusíme brať do úvahy. Okrem toho vzniknú členy tvaru $e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$, ktoré môžu vytvoriť nenulové monómy len pre $i=3$ alebo $i=4$ (inak vznikne e_i s exponentom aspoň 2^s+2). Z vyjadrenia $\pi^*([P]_{3\cdot 2^{s-1}})$ už potom e_i nesmie získať exponent väčší ako 1 (a pre $i=3$ nesmie získať ani ten). Takže z P nás zaujímajú iba triedy, ktoré neobsahujú w_4 vo väčšej mocnine ako 1. Všetky také triedy pochádzajú z

$$w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-2}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i}).$$

V tomto výraze je maximálna možná dimenzia triedy $12 + 4 + 3(4 + 8 + \cdots + 2^{s-2}) = 3 \cdot 2^{s-1} + 4$. Aby sme dostali triedu dimenzie $3 \cdot 2^{s-1}$, musíme pre $i > 2$ v zátvorke $(1 + w_1^{2^i} + w_2^{2^i} + w_3^{2^i})$ použiť $w_3^{2^i}$. Zo zvyšnej časti

$$w(\gamma \otimes \gamma)(1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4)(1 + w_1^4 + w_2^4 + w_3^4)$$

potrebujeme ku $w_3^{8+\cdots+2^{s-2}} = w_3^{2^{s-1}-8}$ do celkovej dimenzie $3 \cdot 2^{s-1}$ doplniť triedu dimenzie 24. Keďže vo $w(\gamma \otimes \gamma)$ sú len triedy párnej dimenzie nie väčšej ako 12, dostaneme všetky hľadané triedy z vyjadrenia

$$w_{12}(\gamma \otimes \gamma)\cdot w_4 \cdot w_2^4 + w_{12}(\gamma \otimes \gamma)\cdot 1 \cdot w_3^4 + w_{10}(\gamma \otimes \gamma)\cdot w_2 \cdot w_3^4 + w_8(\gamma \otimes \gamma)\cdot w_4 \cdot w_3^4.$$

Z $w_{12}(\gamma \otimes \gamma)$ nemusíme uvažovať triedu $w_1^4 w_4^2$, ktorá má w_4 v druhej mocnine. Zostane nám tak 8 tried

$$\begin{aligned}&(w_1^2w_2^2w_3^2+w_3^4)w_2^4w_4 + (w_1^2w_2^2w_3^2+w_3^4)w_3^4 + (w_1^2w_2^4+w_1^4w_3^2)w_2w_3^4 + (w_1^2w_3^2+w_2^4)w_3^4w_4 =\\ &= w_1^2w_2^6w_3^2w_4 + w_2^4w_3^4w_4 + w_1^2w_2^2w_3^6 + w_3^8 + w_1^2w_2^5w_3^4 + w_1^4w_2w_3^6 + w_1^2w_3^6w_4 + w_2^4w_3^4w_4.\end{aligned}$$

Z nich druhá a posledná sú rovnaké, zo zvyšných 6 tried (označme ich $D_1, D_2, \dots, D_6$) postupne vypočítame ich príspevok ku $\pi^*(D)e_1^3e_2^2e_3$. Pre jednotlivé triedy D_i teda budeme pokračovať vo vyjadrovaní (3.2.9) dosadzovaním $w_3^{2^{s-1}-8} \cdot D_i$ za $[P]_{3\cdot 2^{s-1}}$.

- $D_1 = w_1^2w_2^6w_3^2w_4$:

Z členov tvaru $e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$, ktoré vzniknú z prvých dvoch zátvoriek v (3.2.9), stačí uvažovať členy s $i = 4$, lebo v D_1 je w_4 v prvej mocnine. Z ostatných zátvoriek už potom nesmieme prispieť ničím, čo obsahuje e_4, skúmame teda výraz

$$\begin{aligned}&e_1^3e_2^2e_3(e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}} + e_4^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot\\ &\quad\cdot (e_1+e_2+e_3)^2(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)^6(e_1e_2e_3)^{2^{s-1}-6}e_1e_2e_3e_4 =\\ &= e_1^{2^{s-1}-2}e_2^{2^{s-1}-3}e_3^{2^{s-1}-4}e_4^{2^s+1}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot\\ &\quad\cdot (e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_2^2e_3^2)(e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_2^4e_3^4).\end{aligned}$$

Každý člen, ktorý vznikne zo súčinu prvej a poslednej zátvorky, má aspoň jedno e_i s exponentom $2^{s-1}+4$. Nenulový monóm dostaneme, len ak $i=3$ (inak by malo e_i exponent aspoň $2^{s-1}+4+2^{s-1}-3=2^s+1$) a zároveň z ostatných zátvoriek nesmieme prispieť ničím, čo obsahuje e_3. Dostaneme tak

$$e_1^{2^{s-1}-2}e_2^{2^{s-1}-3}e_3^{2^{s-1}-4}e_4^{2^s+1}\cdot e_3^{2^{s-1}+4}(e_1^4e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_2^4)\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2)\cdot e_1^2e_2^2=$$

$$=e_1^{2^{s-1}+4}e_2^{2^{s-1}+3}e_3^{2^s}e_4^{2^s+1}\cdot(e_1^{2^{s-1}-4}+e_2^{2^{s-1}-4})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2).$$

Teraz musíme z prvej zátvorky použiť $e_2^{2^{s-1}-4}$ (inak by exponent e_1 bol aspoň 2^s) a zo všetkých ostatných e_1 (aby exponent e_2 nebol viac ako 2^s-1). Dostávame tak jediný monóm $e_1^{2^{s-1}+4+8+\cdots+2^{s-2}+2}e_2^{2^s-1}e_3^{2^s}e_4^{2^s+1}=e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-1}e_3^{2^s}e_4^{2^s+1}$. Takže príspevok D_1 je nenulový.

- $D_2=w_1^2w_2^2w_3^6$:

  Vyjadrenie (3.2.9) rozdelíme na dve časti podľa toho, či v člene tvaru $e_i^{2^s}e_j^{2^{s-1}}e_k^{2^{s-1}}$ je $i=3$, alebo $i=4$. Exponent príslušného e_i už potom nesmieme v ďalších zátvorkách zvýšiť (e_4 by sme síce mohli zvýšiť o 1, ale vo všetkých zátvorkách je príspevok k exponentom aspoň 2). Pre $i=3$ máme

$$e_1^3e_2^2e_3(e_3^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_3^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_3^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot$$
$$\cdot(e_1+e_2+e_4)^2(e_1e_2+e_1e_4+e_2e_4)^2(e_1e_2e_4)^{2^{s-1}-2}=$$
$$=e_1^{2^{s-1}+1}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}-2}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot$$
$$\cdot(e_1^2+e_2^2+e_4^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_4^2).$$

Z prvej zátvorky môžeme k nenulovým monómom prispieť len cez $e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}$ (inak by exponent e_1 bol aspoň 2^s+1), potom však exponent e_1 bude nanajvýš $2^{s-1}+1+8+\cdots+$ $+2^{s-2}+2+2=2^s-3$, čo je na nenulový monóm málo. Takže pre $i=3$ nezískame žiadny nenulový monóm.

Pre $i = 4$ máme

$$e_1^3 e_2^2 e_3 (e_4^{2^s} e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} + e_4^{2^s} e_1^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}} + e_4^{2^s} e_2^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2} (e_1^{2^i} + e_2^{2^i} + e_3^{2^i}) \cdot$$
$$\cdot (e_1 + e_2 + e_3)^2 (e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3)^2 (e_1 e_2 e_3)^{2^{s-1}-2} =$$
$$= e_1^{2^{s-1}+1} e_2^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}-1} e_4^{2^s} (e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2} (e_1^{2^i} + e_2^{2^i} + e_3^{2^i}) \cdot$$
$$\cdot (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(e_1^2 e_2^2 + e_1^2 e_3^2 + e_2^2 e_3^2).$$

Tentoraz môžeme z prvej zátvorky k nenulovým monómom prispieť len cez $e_1^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}}$ (inak by exponent e_2 bol buď práve 2^s, t. j. rovnaký ako exponent e_4, alebo aspoň $2^s + 2$), potom však exponent e_2 bude nanajvýš $2^{s-1} + 8 + \cdots + 2^{s-2} + 2 + 2 = 2^s - 4$, čo je na nenulový monóm málo. Takže ani pre $i = 4$ nezískame žiadny nenulový monóm a príspevok D_2 je nulový.

- $D_3 = w_3^8$:

Keďže za $[P]_{3 \cdot 2^{s-1}}$ do (3.2.9) dosadzujeme $w_3^{2^{s-1}-8} \cdot D_3 = w_3^{2^{s-1}}$, dostaneme (bez vynásobenia prvej a poslednej zátvorky v (3.2.9))

$$e_1^3 e_2^2 e_3 (e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}} e_3^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}})^2 \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^s - 8} =$$
$$= e_1^3 e_2^2 e_3 (e_1^{2^s} e_2^{2^s} e_3^{2^s} + e_1^{2^s} e_2^{2^s} e_4^{2^s} + e_1^{2^s} e_3^{2^s} e_4^{2^s} + e_2^{2^s} e_3^{2^s} e_4^{2^s}) \cdot \prod_{i=3}^{s-1} (e_1^{2^i} + e_2^{2^i} + e_3^{2^i} + e_4^{2^i}).$$

Keďže z prvej zátvorky nutne aspoň jedno z e_1, e_2 získa exponent 2^s a bude tak mať celkom exponent aspoň $2^s + 2$, je príspevok D_3 nulový.

- $D_4 = w_1^2 w_2^5 w_3^4$:

Vyjadrenie (3.2.9) rozdelíme na dve časti rovnako ako pri D_2. Pre $i = 3$ máme

$$e_1^3 e_2^2 e_3 (e_3^{2^s} e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} + e_3^{2^s} e_1^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}} + e_3^{2^s} e_2^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2} (e_1^{2^i} + e_2^{2^i} + e_4^{2^i}) \cdot$$
$$\cdot (e_1 + e_2 + e_4)^2 (e_1 e_2 + e_1 e_4 + e_2 e_4)^5 (e_1 e_2 e_4)^{2^{s-1}-4} =$$
$$= e_1^{2^{s-1}-1} e_2^{2^{s-1}-2} e_3^{2^s+1} e_4^{2^{s-1}-4} (e_1^{2^{s-1}} e_2^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}} e_4^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2} (e_1^{2^i} + e_2^{2^i} + e_4^{2^i}) \cdot$$
$$\cdot (e_1^2 + e_2^2 + e_4^2)(e_1 e_2 + e_1 e_4 + e_2 e_4)(e_1^4 e_2^4 + e_1^4 e_4^4 + e_2^4 e_4^4).$$

K nenulovým monómom nemôžeme z prvej zátvorky prispieť pomocou $e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}$, lebo spolu s príspevkom z poslednej zátvorky by aspoň jedno z e_1, e_2 malo exponent aspoň 2^s+2. Pre podobnú príčinu nemôžeme z poslednej zátvorky prispieť pomocou $e_1^4e_2^4$. Z prvej a poslednej zátvorky teda musí e_4 získať exponent $2^{s-1}+4$ a z ďalších zátvoriek už k exponentu e_4 prispieť nesmieme. Zo zvyšnej časti vyňatím mocnín e_4 z prvej a poslednej zátvorky dostaneme

$$e_1^{2^{s-1}-1}e_2^{2^{s-1}-2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2)\cdot e_1e_2\cdot(e_1^4+e_2^4).$$

Pre $i=4$ máme (k exponentu e_4 je možné hodnotou 1 prispieť jedine z $(\sum e_je_k)$)

$$\begin{aligned}&e_1^3e_2^2e_3(e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_4^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot(e_1+e_2+e_3)^2\cdot\\&\cdot(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)^4(e_1e_2e_3)^{2^{s-1}-4}=\\&=e_1^{2^{s-1}-1}e_2^{2^{s-1}-2}e_3^{2^{s-1}-3}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot\\&\cdot(e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)(e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_2^4e_3^4).\end{aligned}$$

Rovnako ako pri $i=3$, k nenulovým monómom nemôžeme z prvej zátvorky prispieť pomocou $e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}$, resp. z poslednej zátvorky pomocou $e_1^4e_2^4$. Z prvej a poslednej zátvorky teda musí e_3 získať exponent $2^{s-1}+4$ a z ďalších zátvoriek už k exponentu e_3 prispieť nesmieme, zároveň ani k e_4 už nesmieme prispieť – exponent 2^s+1 už bude mať e_3. Vynechaním uvedených členov a vyňatím mocnín e_3 z prvej a poslednej zátvorky dostaneme

$$e_1^{2^{s-1}-1}e_2^{2^{s-1}-2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2)\cdot e_1e_2\cdot(e_1^4+e_2^4),$$

čo je výraz totožný s tým, ktorý sme dostali pre $i=3$. Bez ohľadu na to, či z neho vzniknú nejaké nulové monómy, je teda v súčte príspevok D_4 nulový.

- $D_5 = w_1^4 w_2 w_3^6$:

  Opäť rozlíšime dva prípady. Pre $i = 3$ máme

$$\begin{aligned}
&e_1^3e_2^2e_3(e_3^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_3^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} + e_3^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot \\
&\quad \cdot (e_1+e_2+e_4)^4(e_1e_2+e_1e_4+e_2e_4)(e_1e_2e_4)^{2^{s-1}-2} = \\
&= e_1^{2^{s-1}+1}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}-2}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_4^{2^i})\cdot \\
&\quad \cdot (e_1^4+e_2^4+e_4^4)(e_1e_2+e_1e_4+e_2e_4).
\end{aligned}$$

Z prvej zátvorky prispeje k nenulovým monómom iba člen $e_2^{2^{s-1}}e_4^{2^{s-1}}$ (z ostatných dvoch by sme mali pri e_1 exponent aspoň 2^s+1). Z ďalších zátvoriek už potom nesmieme prispieť k exponentu e_2 a exponent e_4 môžeme zvýšiť maximálne o 1. Vznikne tak jediný prípustný monóm $e_1^{2^{s-1}+1}e_2^{2^s}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-2} \cdot e_1^{8+\dots+2^{s-2}+4} \cdot e_1e_4 = e_1^{2^s-2}e_2^{2^s}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-1}$. Takže príspevok v prípade $i = 3$ je nenulový.

Pre $i = 4$ máme (k exponentu e_4 je možné hodnotou 1 prispieť jedine z $(\sum e_je_k)$)

$$\begin{aligned}
&e_1^3e_2^2e_3(e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}} + e_4^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot \\
&\quad \cdot (e_1+e_2+e_3)^4(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)(e_1e_2e_3)^{2^{s-1}-2} = \\
&= e_1^{2^{s-1}+1}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}-1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}} + e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}) \cdot \prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot \\
&\quad \cdot (e_1^4+e_2^4+e_3^4)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4).
\end{aligned}$$

Ak by sme z prvej zátvorky prispeli členom $e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}$, mali by e_1, e_2, e_4 exponenty postupne aspoň 2^s+1, 2^s, 2^s, z čoho už nenulový monóm vzniknúť nemôže. Ak by sme prispeli členom $e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}$, mali by e_1, e_3, e_4 exponenty aspoň 2^s+1, 2^s-1, 2^s. V nenulovom monóme by už žiaden nesmel byť väčší, z príspevku poslednej zátvorky sa však aspoň jeden z nich zväčší. Nádej na vznik nenulového monómu tak máme iba pri násobení členom $e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}$. Pritom musíme v každej zo zvyšných zátvoriek použiť člen s e_1 (inak exponent e_1 nedosiahne hodnotu 2^s-2). Dostávame tak tri monómy

$$\begin{aligned}
&e_1^{2^{s-1}+1}e_2^{2^s}e_3^{2^s-1}e_4^{2^s}e_1^{8+\cdots+2^{s-2}+4}(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4) = \\
&= e_1^{2^s-2}e_2^{2^s+1}e_3^{2^s-1}e_4^{2^s} + e_1^{2^s-2}e_2^{2^s}e_3^{2^s}e_4^{2^s} + e_1^{2^s-2}e_2^{2^s}e_3^{2^s-1}e_4^{2^s+1},
\end{aligned}$$

z ktorých jedine druhý nemá požadovanú štvoricu exponentov. V prípade $i=4$ je teda v súčte príspevok nulový a spolu s príspevkom z prípadu $i=3$ dostávame, že príspevok D_5 je nenulový.

- $D_6 = w_1^2w_3^6w_4$:
  Podobne ako pri D_1 uvažujeme len prípad $i=4$ a skúmame výraz

$$\begin{aligned}
&e_1^3e_2^2e_3(e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_4^{2^s}e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_4^{2^s}e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}})\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot(e_1+e_2+e_3)^2\cdot \\
&\cdot(e_1e_2e_3)^{2^{s-1}-2}e_1e_2e_3e_4 = e_1^{2^{s-1}+2}e_2^{2^{s-1}+1}e_3^{2^{s-1}}e_4^{2^s+1}(e_1^{2^{s-1}}e_2^{2^{s-1}}+e_1^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}e_3^{2^{s-1}})\cdot \\
&\cdot\prod_{i=3}^{s-2}(e_1^{2^i}+e_2^{2^i}+e_3^{2^i})\cdot(e_1^2+e_2^2+e_3^2).
\end{aligned}$$

Nech z prvej zátvorky prispejeme ktorýmkoľvek členom, dostaneme aspoň jedno z e_1, e_2 s exponentom aspoň 2^s+1, teda nenulový monóm vytvoriť nemôžeme. Takže príspevok D_6 je nulový.

Celkový príspevok D sa (v prípade $s>3$) rovná súčtu príspevkov od jednotlivých D_i, čiže je nulový.

Ak $s=3$, tak

$$\begin{aligned}
D &= [w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma)]_{12}\cdot w_3^4 = (w_{12}(\gamma\otimes\gamma)+w_{10}(\gamma\otimes\gamma)w_2+w_8(\gamma\otimes\gamma)w_4)w_3^4 = \\
&= w_1^4w_3^4w_4^2+w_1^2w_2^2w_3^6+w_3^8+w_1^2w_2^5w_3^4+w_1^4w_2w_3^6+w_1^2w_3^6w_4+w_2^4w_3^4w_4.
\end{aligned}$$

Počítajme príspevky jednotlivých tried (nenulový monóm v $\pi^*(D)e_1^3e_2^2e_3$ musí mať štvoricu exponentov 6, 7, 8, 9).

- $w_1^4w_3^4w_4^2$: Máme

$$\pi^*(w_1^4w_3^4w_4^2)e_1^3e_2^2e_3 = e_1^5e_2^4e_3^3e_4^2(e_1^4+e_2^4+e_3^4+e_4^4)(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4).$$

Zo súčinu zátvoriek vzniknú 4 rovnaké členy $e_1^4e_2^4e_3^4e_4^4$. Okrem nich vzniknú len také, v ktorých má niektoré e_i exponent 8 (a teda v celom monóme má exponent aspoň 10). Takže $w_1^4 w_3^4 w_4^2 = 0$.

- $w_1^2 w_2^2 w_3^6$: Máme

$$\begin{aligned}
\pi^*(w_1^2 w_2^2 w_3^6) e_1^3 e_2^2 e_3 &= e_1^3 e_2^2 e_3 (e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_3^2+e_2^2e_4^2+e_3^2e_4^2)\cdot \\
&\cdot (e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2)(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4) = \\
&= e_1^3e_2^2e_3 \cdot \sum e_i^2 \cdot \sum e_i^2 e_j^2 e_k^2 \cdot \sum e_i^2 e_j^2 \cdot \sum e_i^4 e_j^4 e_k^4 = e_1^3 e_2^2 e_3 \cdot \sum e_i^4 e_j^2 e_k^2 \cdot \sum e_i^2 e_j^2 \cdot \sum e_i^4 e_j^4 e_k^4 = \\
&= e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^6 e_j^4 e_k^2 + \sum e_i^6 e_j^2 e_k^2 e_l^2 + \sum e_i^4 e_j^4 e_k^4\big)\cdot \sum e_i^4 e_j^4 e_k^4 = \\
&= e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^{10} e_j^8 e_k^6 + \sum e_i^{10} e_j^8 e_k^4 e_l^2 + \sum e_i^{10} e_j^6 e_k^6 e_l^2 + \sum e_i^8 e_j^8 e_k^8\big).
\end{aligned}$$

Vidíme, že monóm so štvoricou exponentov 6, 7, 8, 9 nevznikne zo žiadneho sčítanca. Takže $w_1^2 w_2^2 w_3^6 = 0$.

- w_3^8: Máme $\pi^*(w_3^8) e_1^3 e_2^2 e_3 = e_1^3 e_2^2 e_3 (e_1^8 e_2^8 e_3^8 + e_1^8 e_2^8 e_4^8 + e_1^8 e_3^8 e_4^8 + e_2^8 e_3^8 e_4^8)$, teda aspoň jedno e_i bude mať exponent aspoň 10 a nenulový monóm nevznikne. Takže $w_3^8 = 0$.

- $w_1^2 w_2^5 w_3^4$: Máme

$$\begin{aligned}
\pi^*(w_1^2 w_2^5 w_3^4) e_1^3 e_2^2 e_3 &= e_1^3 e_2^2 e_3 (e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)\cdot \\
&\cdot (e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_1^4e_4^4+e_2^4e_3^4+e_2^4e_4^4+e_3^4e_4^4)(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4) = \\
&= e_1^3e_2^2e_3 \cdot \sum e_i^4 e_j^4 \cdot \sum e_i^4 e_j^4 e_k^4 \cdot \sum e_i^2 \cdot \sum e_i e_j = e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^8 e_j^8 e_k^4 + \sum e_i^8 e_j^4 e_k^4 e_l^4\big) \sum e_i^2 \cdot \sum e_i e_j = \\
&= e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^{10} e_j^8 e_k^4 + \sum e_i^8 e_j^8 e_k^6 + \sum e_i^8 e_j^8 e_k^4 e_l^2 + \sum e_i^{10} e_j^4 e_k^4 e_l^4 + \sum e_i^8 e_j^6 e_k^4 e_l^4\big) \cdot \sum e_i e_j.
\end{aligned}$$

Nenulový monóm môže vzniknúť iba z príspevku tretieho alebo piateho sčítanca v zátvorke – prvý a štvrtý majú e_i s priveľkým exponentom, druhý má e_l s primalým (nulovým). Takže stačí vypočítať

$$\begin{aligned}
e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^8 e_j^8 e_k^4 e_l^2 + \sum e_i^8 e_j^6 e_k^4 e_l^4\big) \cdot \sum e_i e_j &= e_1^3 e_2^2 e_3 \big(\sum e_i^9 e_j^9 e_k^4 e_l^2 + \sum e_i^9 e_j^8 e_k^5 e_l^2 + \\
&+ \sum e_i^9 e_j^8 e_k^4 e_l^3 + \sum e_i^8 e_j^8 e_k^5 e_l^3 + \sum e_i^9 e_j^7 e_k^4 e_l^4 + \sum e_i^9 e_j^6 e_k^5 e_l^4 + \sum e_i^8 e_j^7 e_k^5 e_l^4 + \sum e_i^8 e_j^6 e_k^5 e_l^5\big).
\end{aligned}$$

Z prvých troch sčítancov nenulový monóm nevznikne (prvý a druhý majú e_l s malým exponentom, z tretieho buď e_i bude mať exponent aspoň 10 alebo e_j exponent 9, teda rovnaký ako e_i). Zo štvrtého sčítanca vznikne jediný nenulový monóm pre $l = 1$, $k = 2$; z piateho jediný pre $i = 4$, $j = 1$; zo šiesteho vzniknú dva pre $i = 4$, $(j, k, l) \in \{(2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$; zo siedmeho dva pre $(i, j, k, l) \in \{(3, 4, 1, 2), (4, 2, 3, 1)\}$; z posledného dva pre $(i,j) \in \{(4,1),(3,4)\}$. Spolu je to 8 nenulových monómov, takže $w_1^2 w_2^5 w_3^4 = 0$.

- $w_1^4 w_2 w_3^6$: Máme

$$\begin{aligned}\pi^*(w_1^4 w_2 w_3^6)e_1^3e_2^2e_3 &= e_1^3e_2^2e_3(e_1^4+e_2^4+e_3^4+e_4^4)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)\cdot\\ &\cdot(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4)(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2) =\\ &= e_1^3e_2^2e_3\cdot\sum e_i^4\cdot\sum e_i^4e_j^4e_k^4\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2\cdot\sum e_ie_j = e_1^3e_2^2e_3\cdot\sum e_i^8e_j^4e_k^4\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2\cdot\sum e_ie_j =\\ &= e_1^3e_2^2e_3\big(\sum e_i^{10}e_j^6e_k^6+\sum e_i^{10}e_j^6e_k^4e_l^2+\sum e_i^8e_j^6e_k^6e_l^2\big)\cdot\sum e_ie_j.\end{aligned}$$

Nenulový monóm môže vzniknúť iba z príspevku tretieho sčítanca v zátvorke – prvý a druhý majú e_i s priveľkým exponentom. Takže stačí vypočítať

$$e_1^3e_2^2e_3\cdot\sum e_i^8e_j^6e_k^6e_l^2\cdot\sum e_ie_j = e_1^3e_2^2e_3\big(\sum e_i^9e_j^7e_k^6e_l^2+\sum e_i^9e_j^6e_k^6e_l^3+\sum e_i^8e_j^7e_k^7e_l^2+\sum e_i^8e_j^7e_k^6e_l^3\big).$$

Z prvého a tretieho sčítanca nenulový monóm nevznikne (majú e_l s malým exponentom). Z tretieho sčítanca vznikne jediný nenulový monóm pre $i=4$, $l=1$. Zo štvrtého sčítanca vzniknú dva nenulové monómy pre $l=1$, $(i,j,k) \in \{(4,2,3),(3,4,2)\}$. Takže $w_1^4 w_2 w_3^6 \neq 0$.

- $w_1^2 w_3^6 w_4$: Máme

$$\begin{aligned}\pi^*(w_1^2w_3^6w_4)e_1^3e_2^2e_3 &= e_1^3e_2^2e_3(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)(e_1^4e_2^4e_3^4+e_1^4e_2^4e_4^4+e_1^4e_3^4e_4^4+e_2^4e_3^4e_4^4)\cdot\\ &\cdot(e_1^2e_2^2e_3^2+e_1^2e_2^2e_4^2+e_1^2e_3^2e_4^2+e_2^2e_3^2e_4^2)(e_1e_2e_3e_4) = e_1^4e_2^3e_3^2e_4\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2\cdot\sum e_i^2\cdot\sum e_i^4e_j^4e_k^4 =\\ &= e_1^4e_2^3e_3^2e_4\cdot\sum e_i^4e_j^2e_k^2\cdot\sum e_i^4e_j^4e_k^4 = e_1^4e_2^3e_3^2e_4\big(\sum e_i^8e_j^6e_k^6+\sum e_i^8e_j^6e_k^4e_l^2\big).\end{aligned}$$

Z prvého sčítanca nenulový monóm nevznikne, lebo má e_l s malým (nulovým) exponentom. Z druhého sčítanca vznikne jediný nenulový monóm pre $i=4$, $l=1$, $j=3$, $k=2$. Takže $w_1^2 w_3^6 w_4 \neq 0$.

- $w_2^4 w_3^4 w_4$: Táto trieda je zhodná s triedou C_3 (prípad $s=3$), o ktorej sme ukázali, že je nenulová.

V prípade $s=3$ je teda príspevok D nenulový.

Zostáva vypočítať hodnotu E. Najskôr sa pozrieme na prípad $s>4$. Kvôli prehľadnosti označme $Q := w(\gamma \otimes \gamma) w(\gamma) \cdot \prod_{i=2}^{s-3} w(\gamma)^{2^i}$. Máme

$$\begin{aligned}
E &= [P]_{2^s} \cdot w_4^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8} = [Q \cdot w(\gamma)^{2^{s-2}}]_{2^s} \cdot w_4^{2^{s-1}} \cdot w_1^{2^s-8} = \\
&= w_4^{2^{s-1}} w_1^{2^s-8} \big([Q]_{2^s} + w_1^{2^{s-2}} [Q]_{3\cdot 2^{s-2}} + w_2^{2^{s-2}} [Q]_{2^{s-1}} + w_3^{2^{s-2}} [Q]_{2^{s-2}} + w_4^{2^{s-2}} [Q]_0 \big) = \\
&= \underbrace{w_1^{2^s-8} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{2^s}}_{:=E_1} + \underbrace{w_1^{2^s+2^{s-2}-8} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{3\cdot 2^{s-2}}}_{:=E_2} + \underbrace{w_1^{2^s-8} w_2^{2^{s-2}} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{2^{s-1}}}_{:=E_3} + \\
&\quad + \underbrace{w_1^{2^s-8} w_3^{2^{s-2}} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{2^{s-2}}}_{:=E_4} + \underbrace{w_1^{2^s-8} w_4^{2^{s-1}+2^{s-2}} [Q]_0}_{:=E_5}.
\end{aligned}$$

Najväčšia možná dimenzia triedy v Q je $12 + 4 + 4(4 + 8 + \cdots + 2^{s-3}) = 2^s$. Preto

$$\begin{aligned}
&\pi^*(E_1) e_1^3 e_2^2 e_3 = \pi^*(w_1^{2^s-8} w_4^{2^{s-1}} w_{12}(\gamma \otimes \gamma) w_4^{1+4+8+\cdots+2^{s-3}}) e_1^3 e_2^2 e_3 = \\
&= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^s-8} (e_1 e_2 e_3 e_4)^{2^{s-1}+2^{s-2}-3} \pi^*(w_{12}(\gamma \otimes \gamma)) e_1^3 e_2^2 e_3 = \\
&= e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}} e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}-1} e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}-2} e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}-3} (e_1^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}} + e_3^{2^{s-1}} + e_4^{2^{s-1}}) \cdot \\
&\quad \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^{s-1}-8} \pi^*(w_{12}(\gamma \otimes \gamma)).
\end{aligned}$$

Nech z prvej zátvorky prispejeme ktorýmkoľvek členom tvaru $e_i^{2^{s-1}}$, dostaneme e_i s exponentom aspoň $2^{s-1} + 2^{s-2} - 3 + 2^{s-1} = 2^s + 2^{s-2} - 3 > 2^s + 1$. Teda nenulový monóm vytvoriť nemôžeme a $E_1 = 0$.

Aj $E_2 = 0$, lebo

$$\begin{aligned}
&\pi^*(E_2) e_1^3 e_2^2 e_3 = \pi^*(w_1^{2^s+2^{s-2}-8} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{3\cdot 2^{s-2}}) e_1^3 e_2^2 e_3 = \\
&= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^s+2^{s-2}-8} (e_1 e_2 e_3 e_4)^{2^{s-1}} \pi^*([Q]_{3\cdot 2^{s-2}}) e_1^3 e_2^2 e_3 = \\
&= e_1^{2^{s-1}+3} e_2^{2^{s-1}+2} e_3^{2^{s-1}+1} e_4^{2^{s-1}} (e_1^{2^s} + e_2^{2^s} + e_3^{2^s} + e_4^{2^s}) (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^{s-2}-8} \pi^*([Q]_{3\cdot 2^{s-2}}),
\end{aligned}$$

teda v každom monóme bude niektoré e_i s exponentom aspoň $2^s + 2^{s-1} > 2^s + 1$.

Ďalej máme

$$\begin{aligned}
&\pi^*(E_3) e_1^3 e_2^2 e_3 = \pi^*(w_1^{2^s-8} w_2^{2^{s-2}} w_4^{2^{s-1}} [Q]_{2^{s-1}}) e_1^3 e_2^2 e_3 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^s-8} \cdot \\
&\quad \cdot (e_1e_2 + e_1e_3 + e_1e_4 + e_2e_3 + e_2e_4 + e_3e_4)^{2^{s-2}} (e_1 e_2 e_3 e_4)^{2^{s-1}} \pi^*([Q]_{2^{s-1}}) e_1^3 e_2^2 e_3 = \\
&= e_1^{2^{s-1}+3} e_2^{2^{s-1}+2} e_3^{2^{s-1}+1} e_4^{2^{s-1}} (e_1^{2^{s-1}} + e_2^{2^{s-1}} + e_3^{2^{s-1}} + e_4^{2^{s-1}}) (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^{2^{s-1}-8} \cdot \\
&\quad \cdot (e_1^{2^{s-2}} e_2^{2^{s-2}} + e_1^{2^{s-2}} e_3^{2^{s-2}} + e_1^{2^{s-2}} e_4^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}} e_3^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}} e_4^{2^{s-2}} + e_3^{2^{s-2}} e_4^{2^{s-2}}) \pi^*([Q]_{2^{s-1}}).
\end{aligned}$$

Monóm, ku ktorému z prvej zátvorky prispejeme členom $e_i^{2^{s-1}}$, bude mať e_i s exponentom aspoň $2^s + 4 - i$. Pre $i = 1, 2$ teda bude nulový, pre $i = 3$ môže byť nenulový, len ak vo zvyšnej časti nebude obsahovať e_3 a pre $i = 4$ môže byť nenulový, len ak vo zvyšnej časti pribudne e_4 nanajvýš v prvej mocnine. Stačí teda skúmať výraz

$$\begin{aligned}\big(&e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-1}-8}(e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}+e_1^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}})+\\ &+e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-1}-8}(e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}+e_1^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}})\big)\cdot\\ &\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-3}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-1}}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

Zátvorku $(e_1+e_2+e_i)^{2^{s-1}-8}$ možno rozpísať na $(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_i^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_i)^{2^{s-2}-8}$. Keď prvý činiteľ tohto súčinu vynásobíme zátvorkou $(e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}+e_1^{2^{s-2}}e_i^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}e_i^{2^{s-2}})$, dostaneme

$$e_1^{2^{s-1}}(e_2^{2^{s-2}}+e_i^{2^{s-2}})+e_2^{2^{s-1}}(e_1^{2^{s-2}}+e_i^{2^{s-2}})+e_i^{2^{s-1}}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})+3e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_i^{2^{s-2}}.$$

Keď tento výraz dosadíme (postupne pre $i = 4, 3$) do (3.2.10) a vynecháme v ňom členy, z ktorých by vzniklo e_1 alebo e_2 s exponentom väčším ako $2^s + 1$, dostaneme (počítajúc nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{aligned}&\Big(e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}}\big(e_4^{2^{s-1}}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})+e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}}\big)(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}+\\ &+e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^s}\big(e_3^{2^{s-1}}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})+e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}}\big)(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}\Big)\cdot\\ &\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-3}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-1}}\Big)=\\ &=\Big(e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}+\\ &\quad+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}+\\ &\quad+e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}+\\ &\quad+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}\Big)\cdot\\ &\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-3}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-1}}\Big).\end{aligned}$$

Všimnime si výrazy v prvom a treťom riadku veľkej zátvorky. Triedy e_3, e_4 v nich majú dvojicu exponentov $2^s + 1$, 2^s, ktoré už pre vznik nenulových monómov nesmieme zvýšiť. Nenulové monómy tak môžu v oboch výrazoch vzniknúť len z toho istého vyjadrenia $e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}})(e_1+e_2)^{2^{s-2}-8}$ a nad $\mathbb{Z}_2$ ich nemusíme uvažovať. Ostáva prešetriť

$$\begin{aligned}&\Big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}+\\&+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}\Big)\cdot\\&\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-3}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-1}}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

Ukážeme matematickou indukciou, že nenulové monómy z ostatného vyjadrenia stačí hľadať vo vyjadrení

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\\&\cdot\pi^*\big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)(1+w_1^4+w_2^4+w_3^4)]_{16}\big).\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

V prípade $s=5$ to tak samozrejme je (obe vyjadrenia sú vtedy totožné). Ak $s>5$, môžeme z poslednej zátvorky $(1+w_1^{2^{s-3}}+w_2^{2^{s-3}}+w_3^{2^{s-3}})$ v (3.2.11) prispieť do súčinu jedným z členov 1, $w_1^{2^{s-3}}$, $w_2^{2^{s-3}}$, $w_3^{2^{s-3}}$. Maximálna dimenzia triedy vo zvyšnej časti argumentu π^* je $12+$ $+\,4+3(4+8+\cdots+2^{s-4})=3\cdot2^{s-3}+4<2^{s-1}$, členom 1 teda k triede dimenzie 2^{s-1} neprispejeme. Ak by sme prispeli členom $w_1^{2^{s-3}}$, skúmali by sme ďalej výraz

$$\begin{aligned}&\Big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}+2^{s-3}-8}+\\&+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}+2^{s-3}-8}\Big)\cdot\\&\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-4}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{3\cdot2^{s-3}}\Big)=\\&=\Big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_4^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-3}-8}+\\&+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_3^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-3}-8}\Big)\cdot\\&\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-4}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{3\cdot2^{s-3}}\Big).\end{aligned}$$

Zo zátvorky $(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_4^{2^{s-2}})$ môžeme k nenulovým monómom prispieť len cez $e_4^{2^{s-2}}$ (aby neboli exponenty e_1 a e_2 priveľké) a z ďalšej časti už nesmieme ku e_4 prispieť. Rovnakú úvahu môžeme urobiť aj s e_3 pri zátvorke $(e_1^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}} + e_3^{2^{s-2}})$. Potom však vo veľkej zátvorke ostane len dva krát ten istý výraz

$$e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3} e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2} e_3^{2^s+1} e_4^{2^s} (e_1 + e_2)^{2^{s-3}-8},$$

ktorý nad $\mathbb{Z}_2$ nemusíme brať do úvahy. A ak by sme prispeli členom $w_3^{2^{s-3}}$, skúmali by sme ďalej výraz

$$\begin{aligned}
&\Big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3} e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2} e_3^{2^s+1} e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}} (e_1 + e_2 + e_4)^{2^{s-2}-8} (e_1 e_2 e_4)^{2^{s-3}} + \\
&+ e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3} e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2} e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1} e_4^{2^s} (e_1 + e_2 + e_3)^{2^{s-2}-8} (e_1 e_2 e_3)^{2^{s-3}}\Big) \cdot \\
&\cdot \pi^* \Big([w(\gamma \otimes \gamma)(1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \cdot \prod_{i=2}^{s-4} (1 + w_1^{2^i} + w_2^{2^i} + w_3^{2^i})]_{2^{s-3}} \Big) = \\
&= \Big(e_1^{2^s-2^{s-3}+3} e_2^{2^s-2^{s-3}+2} e_3^{2^s+1} e_4^{2^s-2^{s-3}} (e_1^{2^{s-3}} + e_2^{2^{s-3}} + e_4^{2^{s-3}})(e_1 + e_2 + e_4)^{2^{s-3}-8} + \\
&+ e_1^{2^s-2^{s-3}+3} e_2^{2^s-2^{s-3}+2} e_3^{2^s-2^{s-3}+1} e_4^{2^s} (e_1^{2^{s-3}} + e_2^{2^{s-3}} + e_3^{2^{s-3}})(e_1 + e_2 + e_3)^{2^{s-3}-8} \Big) \cdot \\
&\cdot \pi^* \Big([w(\gamma \otimes \gamma)(1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \cdot \prod_{i=2}^{s-4} (1 + w_1^{2^i} + w_2^{2^i} + w_3^{2^i})]_{2^{s-3}} \Big).
\end{aligned}$$

Podobne ako pred chvíľou, zo zátvoriek $(e_1^{2^{s-3}} + e_2^{2^{s-3}} + e_i^{2^{s-3}})$ možeme pre $i = 3, 4$ prispieť len cez $e_i^{2^{s-3}}$ a vo veľkej zátvorke vzniknú dva totožné výrazy. V (3.2.11) teda stačí skúmať časť, ku ktorej zo zátvorky $(1 + w_1^{2^{s-3}} + w_2^{2^{s-3}} + w_3^{2^{s-3}})$ prispejeme členom $w_2^{2^{s-3}}$. Skúmaná časť má potom vyjadrenie

$$\Big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}(e_1e_2+e_1e_4+e_2e_4)^{2^{s-3}}+$$
$$+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)^{2^{s-3}}\Big)\cdot$$
$$\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-4}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-2}}\Big)=$$
$$=(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot$$
$$\cdot\Big(e_1^{2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^{s-2}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8}(e_1^{2^{s-3}}e_2^{2^{s-3}}+e_1^{2^{s-3}}e_4^{2^{s-3}}+e_2^{2^{s-3}}e_4^{2^{s-3}})+$$
$$+e_1^{2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-2}+1}e_4^{2^{s-1}}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}(e_1^{2^{s-3}}e_2^{2^{s-3}}+e_1^{2^{s-3}}e_3^{2^{s-3}}+e_2^{2^{s-3}}e_3^{2^{s-3}})\Big)\cdot$$
$$\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-4}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-2}}\Big).$$

Každý nenulový monóm musí z posledného vyjadrenia okrem časti $(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}$ získať štvoricu exponentov $2^{s-1}-2$, $2^{s-1}-1$, 2^{s-1}, $2^{s-1}+1$. Uvedené vyjadrenie je zároveň totožné s vyjadrením (3.2.10), keď v ňom namiesto s dosadíme $s-1$. Zopakovaním úvah medzi (3.2.10) a (3.2.11) teda dostaneme, že v uvedenom vyjadrení stačí nenulové monómy hľadať v

$$(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot$$
$$\cdot\Big(e_1^{2^{s-2}+2^{s-3}+3}e_2^{2^{s-2}+2^{s-3}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^{s-2}+2^{s-3}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-3}-8}+$$
$$+e_1^{2^{s-2}+2^{s-3}+3}e_2^{2^{s-2}+2^{s-3}+2}e_3^{2^{s-2}+2^{s-3}+1}e_4^{2^{s-1}}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-3}-8}\Big)\cdot$$
$$\cdot\pi^*\Big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)\cdot\prod_{i=2}^{s-4}(1+w_1^{2^i}+w_2^{2^i}+w_3^{2^i})]_{2^{s-2}}\Big),$$

a tie podľa indukčného predpokladu stačí hľadať v

$$(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}\cdot(e_1^{2^{s-1}-5}e_2^{2^{s-1}-6}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^{s-1}-8}+e_1^{2^{s-1}-5}e_2^{2^{s-1}-6}e_3^{2^{s-1}-7}e_4^{2^{s-1}})\cdot$$
$$\cdot\pi^*\big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)(1+w_1^4+w_2^4+w_3^4)]_{16}\big)=$$
$$=(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot$$
$$\cdot\pi^*\big([w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)(1+w_1^4+w_2^4+w_3^4)]_{16}\big).$$

Naozaj teda stačí nájsť nenulové monómy v (3.2.12).

Keďže $w(\gamma\otimes\gamma)$ obsahuje iba triedy párnej dimenzie nie väčšej ako 12, máme

$$
\begin{aligned}
&[w(\gamma\otimes\gamma)(1+w_1+w_2+w_3+w_4)(1+w_1^4+w_2^4+w_3^4)]_{16} = \\
&= 1\cdot w_4\cdot w_{12}(\gamma\otimes\gamma) + w_1^4\big(w_4\cdot w_8(\gamma\otimes\gamma) + w_2\cdot w_{10}(\gamma\otimes\gamma) + 1\cdot w_{12}(\gamma\otimes\gamma)\big) + \\
&\quad + w_2^4\big(w_4\cdot w_4(\gamma\otimes\gamma) + w_2\cdot w_6(\gamma\otimes\gamma) + 1\cdot w_8(\gamma\otimes\gamma)\big) + \\
&\quad + w_3^4\big(w_4\cdot w_0(\gamma\otimes\gamma) + w_2\cdot w_2(\gamma\otimes\gamma) + 1\cdot w_4(\gamma\otimes\gamma)\big) = \\
&= w_4(w_1^4w_4^2 + w_1^2w_2^2w_3^2 + w_3^4) + w_1^4w_4(w_1^2w_3^2 + w_2^4) + w_1^4w_2(w_1^2w_2^4 + w_1^4w_3^2) + \\
&\quad + w_1^4(w_1^4w_4^2 + w_1^2w_2^2w_3^2 + w_3^4) + w_2^4w_4\cdot w_1^4 + w_2^5\cdot w_1^6 + w_2^4(w_1^2w_3^2 + w_2^4) + \\
&\quad + w_3^4w_4\cdot 1 + w_2w_3^4\cdot w_1^2 + w_3^4\cdot w_1^4 = \\
&= w_1^4w_4^3 + w_1^2w_2^2w_3^2w_4 + 2w_3^4w_4 + w_1^6w_3^2w_4 + 2w_1^4w_2^4w_4 + 2w_1^6w_2^5 + \\
&\quad + w_1^8w_2w_3^2 + w_1^8w_4^2 + w_1^6w_2^2w_3^2 + 2w_1^4w_3^4 + w_1^2w_2^4w_3^2 + w_2^8 + w_1^2w_2w_3^4.
\end{aligned}
$$

Triedy s koeficientom 2 môžeme vynechať a takisto triedy, v ktorých je exponent w_4 väčší ako 1 (z takých získa každý monóm v (3.2.12) príliš veľký exponent pri e_3 alebo e_4). Zostávajúcich 7 tried

$$
w_1^2w_2^2w_3^2w_4,\quad w_1^6w_3^2w_4,\quad w_1^8w_2w_3^2,\quad w_1^6w_2^2w_3^2,\quad w_1^2w_2^4w_3^2,\quad w_2^8,\quad w_1^2w_2w_3^4 \tag{3.2.13}
$$

postupne dosadíme do (3.2.12) namiesto argumentu π^*, pričom pri úpravách budeme automaticky vynechávať triedy, z ktorých nemôžu vzniknúť monómy s požadovanou štvoricou exponentov 2^s-2, 2^s-1, 2^s, 2^s+1 (po vynechaní takých členov budeme namiesto „$=$“ písať „$\simeq$“).

- $w_1^2w_2^2w_3^2w_4$: Máme

$$
\begin{aligned}
&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8} + e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_1^2w_2^2w_3^2w_4) \simeq \\
&\simeq e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-3}e_3^{2^s-4}e_4^{2^s+1}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_2^2e_3^2) \simeq \\
&\simeq e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-3}e_3^{2^s-4}e_4^{2^s+1}\big(e_1^2\cdot e_2^2e_3^2 + e_2^2\cdot e_1^2e_3^2 + e_3^2\cdot(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2)\big).
\end{aligned}
$$

Vzniknú 4 nenulové monómy a príspevok $w_1^2w_2^2w_3^2w_4$ je nulový.

- $w_1^6 w_3^2 w_4$: Máme

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_1^6w_3^2w_4)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-3}e_3^{2^s-4}e_4^{2^s+1}(e_1^4+e_2^4+e_3^4)(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\simeq e_1^{2^s-2}e_2^{2^s-3}e_3^{2^s-4}e_4^{2^s+1}\cdot e_3^4\cdot e_2^2.\end{aligned}$$

Vznikne jeden nenulový monóm a príspevok $w_1^6w_3^2w_4$ je nenulový.

- $w_1^8 w_2 w_3^2$: Máme

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_1^8w_2w_3^2)\simeq\\&\simeq\big(e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-6}(e_1^8{+}e_2^8{+}e_4^8)+e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s-5}e_4^{2^s}(e_1^8{+}e_2^8{+}e_3^8)\big)\cdot\pi^*(w_2^2)\simeq 0.\end{aligned}$$

Nevznikne žiadny nenulový monóm a príspevok $w_1^8w_2w_3^2$ je nulový.

- $w_1^6 w_2^2 w_3^2$: Máme

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_1^6w_2^2w_3^2)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-6}(e_1^4+e_2^4+e_4^4)(e_1^2+e_2^2+e_4^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_4^2+e_2^2e_4^2)+\\&\quad+e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s-5}e_4^{2^s}(e_1^4+e_2^4+e_3^4)(e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_2^2e_3^2)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-6}\big(e_2^4\cdot e_4^2\cdot e_1^2e_4^2+e_4^4\cdot\big(e_1^2\cdot e_2^2e_4^2+e_2^2\cdot(e_1^2e_2^2{+}e_1^2e_4^2)+e_4^2\cdot e_1^2e_2^2\big)\big)+\\&\quad+e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s-5}e_4^{2^s}\big(e_1^4\cdot e_3^2\cdot e_2^2e_3^2+e_3^4\cdot\big(e_1^2\cdot(e_1^2e_2^2{+}e_2^2e_3^2)+e_2^2\cdot e_1^2e_3^2+e_3^2\cdot e_1^2e_2^2\big)\big).\end{aligned}$$

Vznikne 10 nenulových monómov a príspevok $w_1^6w_2^2w_3^2$ je nulový.

- $w_1^2 w_2^4 w_3^2$: Máme

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_1^2w_2^4w_3^2)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-6}(e_1^2+e_2^2+e_4^2)(e_1^4e_2^4+e_1^4e_4^4+e_2^4e_4^4)+\\&\quad+e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s-5}e_4^{2^s}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1^4e_2^4+e_1^4e_3^4+e_2^4e_3^4)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-6}\cdot e_1^2\cdot e_2^4e_4^4+e_1^{2^s-3}e_2^{2^s-4}e_3^{2^s-5}e_4^{2^s}\cdot e_2^2\cdot e_1^4e_3^4.\end{aligned}$$

Vzniknú dva nenulové monómy a príspevok $w_1^2w_2^4w_3^2$ je nulový.

- w_2^8: Máme

$$\begin{aligned}&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s})\cdot\pi^*(w_2^8)\simeq\\&\simeq e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8}(e_1^8e_2^8{+}e_1^8e_4^8{+}e_2^8e_4^8)+e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s}(e_1^8e_2^8{+}e_1^8e_3^8{+}e_2^8e_3^8)\simeq 0.\end{aligned}$$

Nevznikne žiadny nenulový monóm a príspevok w_2^8 je nulový.

- $w_1^2 w_2 w_3^4$: Máme

$$
\begin{aligned}
&(e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-8} + e_1^{2^s-5}e_2^{2^s-6}e_3^{2^s-7}e_4^{2^s}) \cdot \pi^*(w_1^2 w_2 w_3^4) \simeq \\
&\simeq e_1^{2^s-1}e_2^{2^s-2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-4}(e_1^2+e_2^2+e_4^2)(e_1e_2+e_1e_4+e_2e_4)+ \\
&\quad + e_1^{2^s-1}e_2^{2^s-2}e_3^{2^s-3}e_4^{2^s}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4) \simeq \\
&\simeq e_1^{2^s-1}e_2^{2^s-2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s-4} \cdot e_4^2(e_1e_2+e_1e_4)+ \\
&\quad + e_1^{2^s-1}e_2^{2^s-2}e_3^{2^s-3}e_4^{2^s}\big(e_1^2 \cdot e_2e_3 + e_2^2 \cdot (e_2e_3+e_3e_4) + e_3^2 \cdot (e_1e_4+e_3e_4)\big).
\end{aligned}
$$

Vznikne 7 nenulových monómov a príspevok $w_1^2 w_2 w_3^4$ je nenulový.

Súčet všetkých siedmich príspevkov je nulový, takže $E_3 = 0$.

Pre E_4 dostávame

$$
\begin{aligned}
&\pi^*(E_4)e_1^3e_2^2e_3 = \pi^*(w_1^{2^s-8}w_3^{2^{s-2}}w_4^{2^{s-1}}[Q]_{2^{s-2}})e_1^3e_2^2e_3 = (e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-8} \cdot \\
&\quad \cdot (e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+e_1e_3e_4+e_2e_3e_4)^{2^{s-2}}(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}}\pi^*([Q]_{2^{s-2}})e_1^3e_2^2e_3 = \\
&= e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^{s-1}}(e_1^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}+e_3^{2^{s-1}}+e_4^{2^{s-1}})(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-8} \cdot \\
&\quad \cdot (e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}} + e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}} + e_1^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}})\pi^*([Q]_{2^{s-2}}).
\end{aligned}
$$

Monóm, ku ktorému z prvej zátvorky prispejeme členom $e_i^{2^{s-1}}$, bude mať e_i s exponentom aspoň $2^s + 4 - i$. Pre $i = 1, 2$ teda bude nulový, pre $i = 3$ môže byť nenulový, len ak vo zvyšnej časti nebude obsahovať e_3 a pre $i = 4$ môže byť nenulový, len ak vo zvyšnej časti pribudne e_4 nanajvýš v prvej mocnine. Stačí teda skúmať výraz

$$
\begin{aligned}
&\big(e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}}(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-1}-8} \cdot e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_4^{2^{s-2}} + \\
&\quad + e_1^{2^{s-1}+3}e_2^{2^{s-1}+2}e_3^{2^{s-1}+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-1}-8} \cdot e_1^{2^{s-2}}e_2^{2^{s-2}}e_3^{2^{s-2}}\big) \cdot \pi^*([Q]_{2^{s-2}}) = \\
&= \big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_4^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_4)^{2^{s-2}-8} + \\
&\quad + e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^s}(e_1^{2^{s-2}}+e_2^{2^{s-2}}+e_3^{2^{s-2}})(e_1+e_2+e_3)^{2^{s-2}-8}\big) \cdot \\
&\quad \cdot \pi^*([Q]_{2^{s-2}}).
\end{aligned}
$$

Pre vznik nenulového monómu môžeme zo zátvorky $(e_1^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}} + e_4^{2^{s-2}})$ prispieť jedine triedou $e_4^{2^{s-2}}$ (inak by exponent e_1 alebo e_2 bol priveľký) a potom už nesmieme zvýšiť exponent e_4. Podobne zo zátvorky $(e_1^{2^{s-2}} + e_2^{2^{s-2}} + e_3^{2^{s-2}})$ môžeme prispieť len triedou $e_3^{2^{s-2}}$

a nesmieme ďalej zvýšiť exponent e_3. Zostáva teda výraz

$$\begin{aligned}&\big(e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2)^{2^{s-2}-8}+\\&\quad+e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^s+1}e_4^{2^s}(e_1+e_2)^{2^{s-2}-8}\big)\cdot\pi^*([Q]_{2^{s-2}}),\end{aligned}$$

ktorý je nad $\mathbb{Z}_2$ očividne nulový. Takže $E_4 = 0$.

Napokon aj $E_5 = 0$, lebo

$$\begin{aligned}&\pi^*(E_5)e_1^3e_2^2e_3 = \pi^*(w_1^{2^s-8}w_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}[Q]_0)e_1^3e_2^2e_3 = (e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^s-8}\cdot\\&\cdot(e_1e_2e_3e_4)^{2^{s-1}+2^{s-2}}e_1^3e_2^2e_3 = e_1^{2^{s-1}+2^{s-2}+3}e_2^{2^{s-1}+2^{s-2}+2}e_3^{2^{s-1}+2^{s-2}+1}e_4^{2^{s-1}+2^{s-2}}\cdot\\&\cdot(e_1^{2^{s-1}}+e_2^{2^{s-1}}+e_3^{2^{s-1}}+e_4^{2^{s-1}})(e_1+e_2+e_3+e_4)^{2^{s-1}-8}.\end{aligned}$$

Ak z prvej zátvorky do súčinu prispejeme ktorýmkoľvek $e_i^{2^{s-1}}$, bude mať e_i exponent aspoň $2^{s-1}+2^{s-2}+2^{s-1} > 2^s+1$.

Takže pre $s > 4$ máme $E = E_1+E_2+E_3+E_4+E_5 = 0$.

Ak $s = 4$, máme

$$\begin{aligned}&\pi^*(E)e_1^3e_2^2e_3 = \pi^*([w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma)w(\gamma)^4]_{16}\cdot w_4^8\cdot w_1^8)e_1^3e_2^2e_3 =\\&= e_1^{11}e_2^{10}e_3^9e_4^8(e_1^8+e_2^8+e_3^8+e_4^8)\pi^*([w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma)w(\gamma)^4]_{16}).\end{aligned}$$

Nenulové monómy musia mať pri e_1, e_2, e_3, e_4 štvoricu exponentov 14, 15, 16, 17, preto môžu vzniknúť len z vyjadrenia

$$\begin{aligned}&e_1^{11}e_2^{10}e_3^9e_4^8(e_3^8+e_4^8)\pi^*([w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma)w(\gamma)^4]_{16}) =\\&= (e_1^{11}e_2^{10}e_3^{17}e_4^8+e_1^{11}e_2^{10}e_3^9e_4^{16})\pi^*([w(\gamma\otimes\gamma)(w_1+w_2+w_3+w_4)(w_1^4+w_2^4+w_3^4+w_4^4)]_{16}).\end{aligned}$$

V ostatnom vyjadrení stačí uvažovať iba triedy, ktoré majú w_4 nanajvýš v prvej mocnine (inak by e_3 alebo e_4 získalo exponent väčší ako 17). Po vynechaní triedy w_4^4 tak získame vyjadrenie, ktoré je totožné s (3.2.12) pre hodnotu $s = 4$. Pritom o vyjadrení (3.2.12) sme ukázali, keď sme postupne vypočítali príspevky jednotlivých tried z (3.2.13), že z neho vznikne párne veľa nenulových monómov. Pri samotnom počítaní uvedených príspevkov sme navyše nijako nepoužili fakt, že $s > 4$. Takže aj z posledného vyjadrenia vznikne párne veľa nenulových monómov a $E = 0$ aj pre $s = 4$.

Ak $s = 3$, máme

$$\begin{aligned}
&\pi^*(E)e_1^3e_2^2e_3 = \pi^*([w(\gamma\otimes\gamma)w(\gamma)]_8 \cdot w_4^4)e_1^3e_2^2e_3 = \\
&= e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_4(\gamma\otimes\gamma)\cdot w_4 + w_6(\gamma\otimes\gamma)\cdot w_2 + w_8(\gamma\otimes\gamma)\cdot 1) = \\
&= e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_1^4w_4 + w_1^6w_2 + w_1^2w_3^2 + w_2^4).
\end{aligned}$$

Nenulový monóm musí mať štvoricu exponentov 6, 7, 8, 9. Postupne máme

$$e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_1^4w_4) = e_1^8e_2^7e_3^6e_4^5(e_1^4+e_2^4+e_3^4+e_4^4) \simeq e_1^8e_2^7e_3^6e_4^5\cdot e_4^4,$$

takže príspevok $w_1^4w_4$ je nenulový,

$$\begin{aligned}
&e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_1^6w_2) = e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\cdot\sum e_i^4\cdot\sum e_i^2\cdot\sum e_ie_j = e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\big(\sum e_i^6+\sum e_i^4e_j^2\big)\cdot\sum e_ie_j = \\
&= e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\big(\sum e_i^7e_j + \sum e_i^6e_je_k + \sum e_i^5e_j^3 + \sum e_i^5e_j^2e_k + \sum e_i^4e_j^3e_k + \sum e_i^4e_j^2e_ke_l\big) \simeq \\
&\simeq e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4(e_3^3e_4^5 + e_2^2e_3e_4^5 + e_1e_3^2e_4^5 + e_1e_3^4e_4^3 + e_2^3e_3e_4^4 + e_1e_2e_3^4e_4^2 + e_1^2e_2e_3e_4^4),
\end{aligned}$$

takže príspevok $w_1^6w_2$ je nenulový,

$$\begin{aligned}
&e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_1^2w_3^2) = e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\cdot\sum e_i^2\cdot\sum e_i^2e_j^2e_k^2 = e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\cdot\sum e_i^4e_j^2e_k^2 \simeq \\
&\simeq e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4(e_2^2e_3^4e_4^2 + e_1^2e_3^2e_4^4),
\end{aligned}$$

takže príspevok $w_1^2w_3^2$ je nulový, a napokon

$$e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\pi^*(w_2^4) = e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4(e_1^4e_2^4 + e_1^4e_3^4 + e_1^4e_4^4 + e_2^4e_3^4 + e_2^4e_4^4 + e_3^4e_4^4) \simeq e_1^7e_2^6e_3^5e_4^4\cdot e_3^4e_4^4,$$

takže príspevok w_2^4 je nenulový. Teda pre $s = 3$ je $E \neq 0$.

Ukázali sme, že pre $s > 3$ sú A, B, D, E nulové a C nenulové a pre $s = 3$ sú A, B nulové a C, D, E nenulové. V oboch prípadoch máme $V = A + B + C + D + E \neq 0$, čím je časť (ii) vety 3.1.4 dokázaná. □

Záver

Uvedieme niekoľko námetov pre ďalší výskum, týkajúcich sa problémov, ktoré sme v práci riešili.

Rozpon Doldových variet

V kapitole 2 sme určili presný rozpon $P(m, n)$ pre všetky hodnoty m, n okrem nasledujúcich prípadov (poz. tabuľku 3):

(1) $n \equiv 3 \pmod 4$, $m \equiv 1 \pmod 2$;

(2) $n \equiv 1 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$;

(3) $n \equiv 0 \pmod 2$, $m \equiv 15 \pmod{16}$.

V uvedených prípadoch máme aspoň horné ohraničenie rozponu určené vetou 2.1.9 a dolné ohraničenie $\operatorname{span} P(m, n) \geq \operatorname{span} S^m$ (tvrdenie 2.1.5), prípadne

$$\operatorname{span} P(m, n) \geq \varrho(\operatorname{nsd}(m-1, n+1)) - 2$$

(záver podkapitoly 2.2). Posledné dolné ohraničenie dá zaujímavé výsledky najmä pre $m = 1$ (poz. tabuľku 4).

V podkapitole 2.3 sme však ukázali, ako sa dá na $P(m, 1)$ (pre nepárne m) skonštruovať o jedno vektorové pole viac ako na S^m, teda $\operatorname{span} P(m, 1) \geq \operatorname{span} S^m + 1$. Keby sa nám to podarilo ukázať aj pre ďalšie hodnoty n, prípad (2) by sa zredukoval len na $n \equiv 1 \pmod 4$, $m \equiv 15 \pmod{16}$ (keďže v ostatných prípadoch by sme už podľa dôsledku 2.1.13 poznali presný rozpon). Taktiež sa možno pokúsiť zvýšiť počet vektorových polí o viac ako o jedno a zredukovať tým prípady (1) alebo (3).

V prípade $n = 1$ sme použili fakt, že priestory $\mathbb{C}P^1$ a S^2 sú homeomorfné, čo zjednodušilo konštrukciu vektorových polí. Stačilo totiž vytvoriť vhodné vektorové polia na S^2.

Pre vyššie n už priestor $\mathbb{C}P^n$ nie je homeomorfný so žiadnou sférou, môžeme ale zobrať polia, ktoré sme vytvorili pre prípad $n = 1$ na S^2, pozrieť sa, aké majú tieto polia predpis po prenesení na $\mathbb{C}P^1$ a pokúsiť sa zovšeobecniť tento predpis pre ďalšie hodnoty n.

O duálnych Stiefelových-Whitneyho triedach niektorých Grassmannových variet

V kapitole 3 sme sa zaoberali duálnymi Stiefelovými-Whitneyho triedami Grassmannových variet $G_{n,k}$ pre $k = 4$ a tie hodnoty n, ktoré nie sú zahrnuté v tvrdeniach 3.1.1 a 3.1.2. Tieto tvrdenia sú pritom sformulované pre všeobecné k a navyše je v prácach [47], [16] dokázané, že duálna Stiefelova-Whitneyho trieda $\bar{w}_q(G_{n,k})$, o ktorej sa v nich hovorí, je najvyššia nenulová, t. j. triedy $\bar{w}_i(G_{n,k})$ sú pre $i > q$ všetky nulové. V [16] je ešte dokázané, že pre $G_{2k,k}$ je najvyššia nenulová trieda $\bar{w}_{k(k-1)}(G_{2k,k})$ a pre $G_{2k+1,k}$ je najvyššia nenulová trieda $\bar{w}_{k^2}(G_{2k+1,k})$.

Zoberme pevné k. Keďže $G_{n,k}$ je difeomorfná s $G_{n,n-k}$, zaoberáme sa len prípadom $n \geq 2k$. Tvrdenie 3.1.1 pokrýva všetky hodnoty n spomedzi

$$2^{s-1} + k, \quad 2^{s-1} + k + 1, \quad \ldots, \quad 2^s$$

pre ľubovoľné s spĺňajúce $2^s \geq 2k$. Tvrdenie 3.1.2 pokrýva hodnoty $n = 2^s + 1$ (pre s spĺňajúce $2^s \geq 2k$). Chýbajú teda tieto hodnoty n:

$$\begin{aligned} &2^s + 2, \quad 2^s + 3, \quad \ldots, \quad 2^s + k - 1 \qquad \text{pre } s \text{ spĺňajúce } 2^s \geq 2k, \\ &2k + 2, \quad 2k + 3, \quad \ldots, \quad 2^s + k - 1 \qquad \text{pre } s \text{ spĺňajúce } k \leq 2^s < 2k \end{aligned} \tag{$*$}$$

(v prvom riadku je pre každé s práve $k - 2$ čísel, v druhom riadku pre niektoré hodnoty k nie je žiadne číslo).

Pre $k = 1$ a $k = 2$ nechýbajú žiadne hodnoty n, teda pre ne je otázka najvyššej nenulovej duálnej Stiefelovej-Whitneyho triedy vyriešená.

Pre $k = 3$ chýbajú len hodnoty $n = 2^s + 2$ pre $2^s \geq 6$. Pre tento prípad Oproiu v [46] ukázal nenulovosť triedy $\bar{w}_{2^{s+1}}(G_{2^s+2,3})$. Pritom pre malé s sa dá priamym výpočtom ukázať, že pre $q > 2^{s+1}$ sú triedy $\bar{w}_q(G_{2^s+2,3})$ nulové (Oproiu to overil pre $s = 3, 4$, my sme to overili aj pre $s = 5, 6$); na základe tohto máme hypotézu, že $\bar{w}_{2^{s+1}}(G_{2^s+2,3})$ je najvyššia nenulová trieda.

Pre $k = 4$ chýbajú len hodnoty $n = 2^s + 2$ a $n = 2^s + 3$ pre $2^s \geq 8$. Vo vete 3.1.4 sme ukázali nenulovosť tried $\bar{w}_{2^{s+1}+4}(G_{2^s+2,4})$, $\bar{w}_{3\cdot 2^s}(G_{2^s+3,4})$ a máme hypotézu, že vyššie triedy sú všetky nulové (priamym výpočtom sme to overili pre $s = 3, 4, 5, 6$).

Pre $k = 5$ chýbajú hodnoty $n = 12$ a $n = 2^s + 2, 2^s + 3, 2^s + 4$ pre $2^s > 10$. Postupom uvedeným v [5] alebo [30] možno pre $k = 5$ vyjadriť $w(\gamma \otimes \gamma)$ pomocou w_1, w_2, w_3, w_4, w_5:

$$\begin{aligned}
w_0(\gamma \otimes \gamma) &= 1,\\
w_2(\gamma \otimes \gamma) &= 0,\\
w_4(\gamma \otimes \gamma) &= w_2^2,\\
w_6(\gamma \otimes \gamma) &= w_1^2 w_2^2 + w_3^2,\\
w_8(\gamma \otimes \gamma) &= w_1^4 w_2^2 + w_1^8 + w_2^4 + w_4^2,\\
w_{10}(\gamma \otimes \gamma) &= w_5^2 + w_1^6 w_2^2 + w_1^4 w_3^2 + w_1^2 w_4^2,\\
w_{12}(\gamma \otimes \gamma) &= w_1^4 w_2^4 + w_2^6 + w_3^4,\\
w_{14}(\gamma \otimes \gamma) &= w_1^2 w_2^6 + w_2^4 w_3^2,\\
w_{16}(\gamma \otimes \gamma) &= w_2^4 w_4^2 + w_2^2 w_3^4 + w_3^2 w_5^2 + w_1^2 w_3^2 w_4^2 + w_1^2 w_2^2 w_5^2 + w_1^4 w_2^2 w_4^2 + w_1^4 w_3^4,\\
w_{18}(\gamma \otimes \gamma) &= w_3^6 + w_1^2 w_2^4 w_4^2 + w_1^2 w_2^2 w_3^4 + w_2^4 w_5^2,\\
w_{20}(\gamma \otimes \gamma) &= w_2^2 w_3^2 w_5^2 + w_1^2 w_2^4 w_5^2 + w_5^4 + w_3^4 w_4^2 + w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2 + w_1^4 w_4^4
\end{aligned}$$

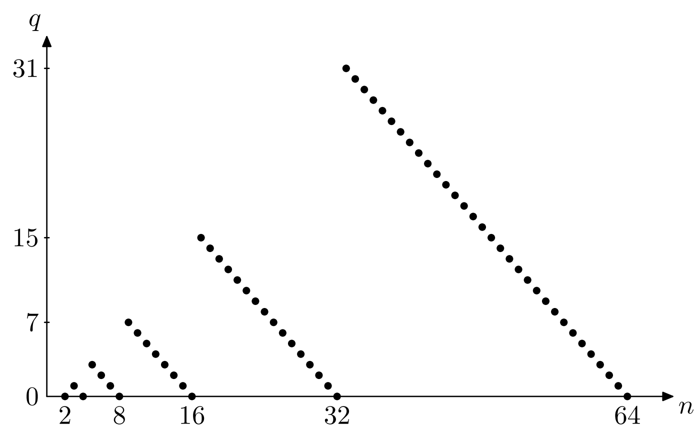
(ostatné triedy sú nulové). Poznajúc predpis pre $w(\gamma \otimes \gamma)$, môžeme pre malé hodnoty n na základe predpisu (3.1) vypočítať $\bar{w}(G_{n,5})$. Tak dostaneme pre najmenšie chýbajúce hodnoty n, že najvyššie nenulové duálne Stiefelove-Whitneyho triedy príslušných Grassmannových variet sú $\bar{w}_{28}(G_{12,5})$, $\bar{w}_{42}(G_{18,5})$, $\bar{w}_{53}(G_{19,5})$, $\bar{w}_{64}(G_{20,5})$, $\bar{w}_{74}(G_{34,5})$, $\bar{w}_{101}(G_{35,5})$, $\bar{w}_{128}(G_{36,5})$.

Závislosť dimenzie q najvyššej nenulovej triedy $\bar{w}_q(G_{n,k})$ od n je pre hodnoty $k = 1, 2, 3, 4, 5$ znázornená na obr. 5 až 9.

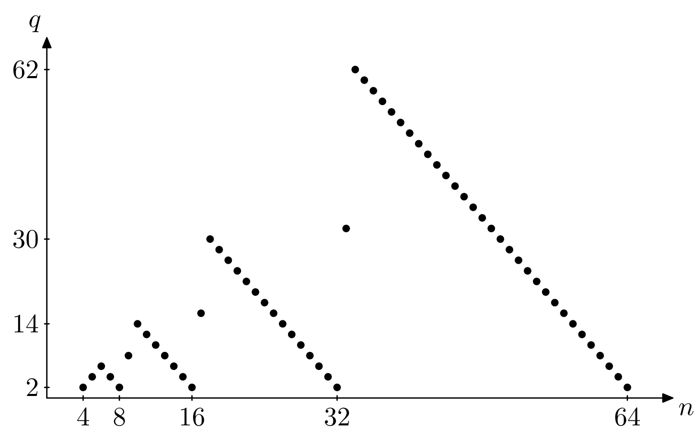
Na základe uvedených výsledkov možno vysloviť nasledujúcu hypotézu.

Hypotéza. *Ak $2^s \geq 2k$ a $2^s \leq n \leq 2^s + k$, tak dimenzia najvyššej nenulovej duálnej Stiefelovej-Whitneyho triedy Grassmannovej variety $G_{n,k}$ je $k(2^s + k - n - 1) + 2^s(n - 2^s)$.*

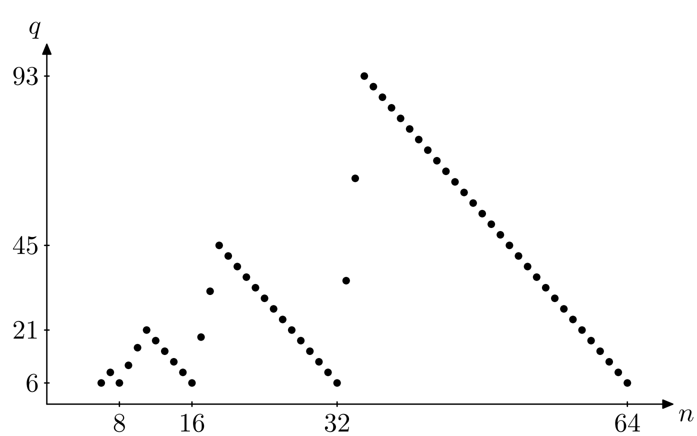
Ako sme už povedali, táto hypotéza je pravdivá pre krajné hodnoty $n = 2^s, 2^s + 1, 2^s + k$ (tvrdenia 3.1.1, 3.1.2). Priamym výpočtom sme ju overili pre $k = 3, 4$, $s = 3, 4, 5, 6$, resp. pre $k = 5$, $s = 4, 5$. Pre $k = 3$ ([46]) a $k = 4$ (veta 3.1.4) je pravda, že triedy danej výšky



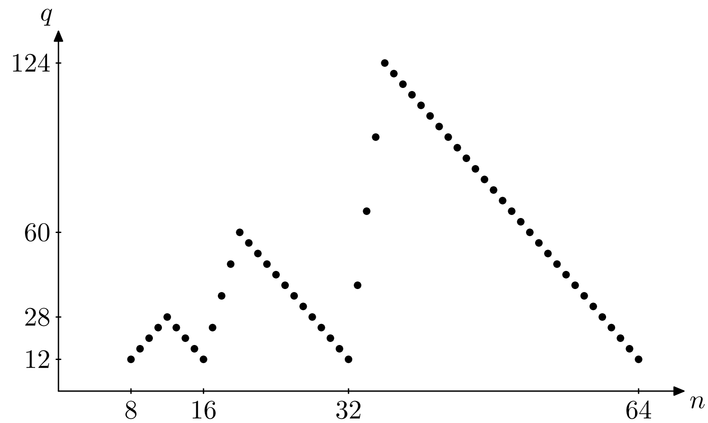
Obr. 5: *Závislosť dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,1}) \neq 0$



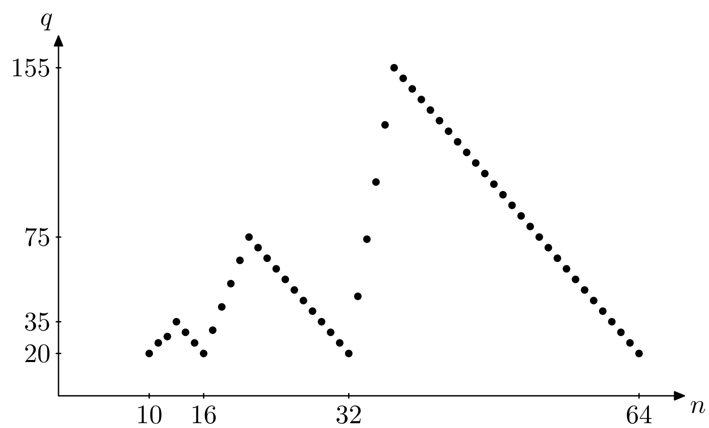
Obr. 6: *Závislosť dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,2}) \neq 0$



Obr. 7: *Závislosť dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,3}) \neq 0$



Obr. 8: *Závislosť dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,4}) \neq 0$



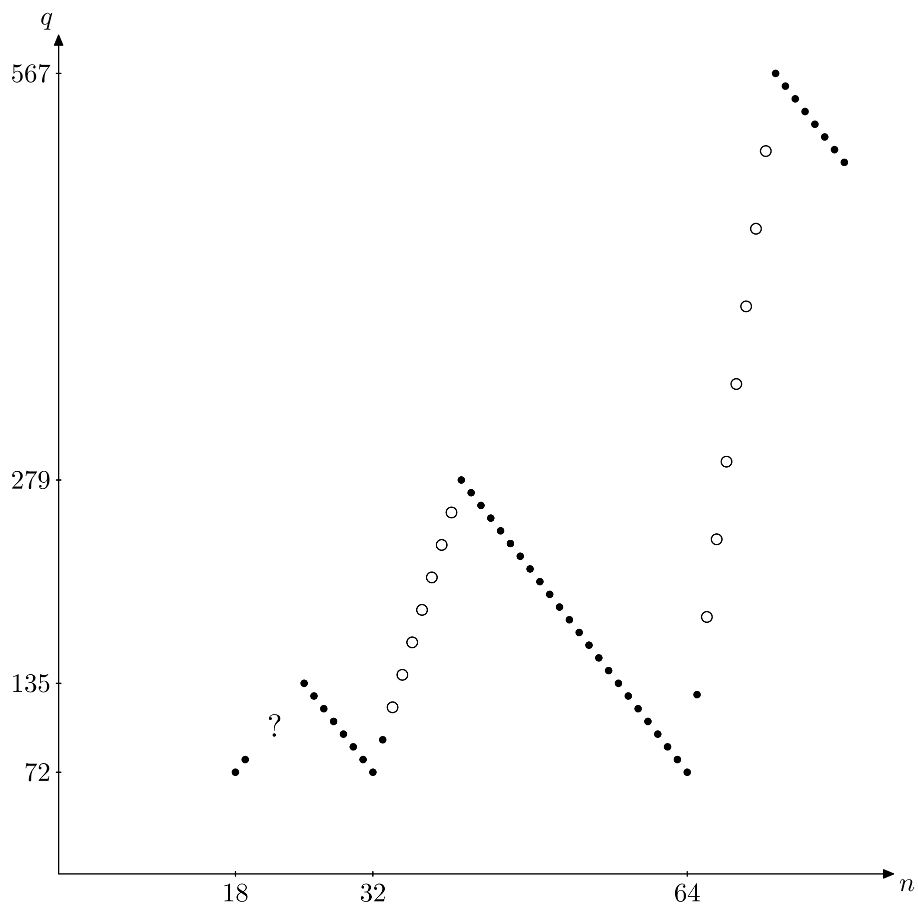
Obr. 9: *Závislosť dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,5}) \neq 0$

sú nenulové a zostáva len otázka, či sú vyššie triedy všetky nulové.

Hypotéza zahŕňa všetky prípady z prvého riadku v $(*)$. Okrem nich už je otázka najvyššej nenulovej triedy $\bar{w}_q(G_{n,k})$ otvorená len pre čísla, ktoré sú v druhom riadku v $(*)$. Ako ukazuje pre $k = 5$ obr. 9, závislosť q od n na intervale $2k, 2k+1, \dots, 2^s + k$, ktorý dané čísla obsahuje, nie je vždy lineárna.

Na obr. 10 je na ilustráciu pre $k = 9$ znázornená závislosť najvyššej nenulovej triedy vyplývajúca z hypotézy. Prípady, pre ktoré je otázka vyriešená, sú znázornené plným krúžkom, prípady, ktoré zahŕňa hypotéza (okrem vyriešených), sú znázornené prázdnym krúžkom.

V prípade potvrdenia hypotézy (alebo aspoň jej časti) získame o. i. nové výsledky pre problém vnorenia a vloženia Grassmannových variet. Napríklad pre $k = 8$, $n = 18$ dosta-



Obr. 10: *Hypotéza závislosti dimenzie najvyššej triedy* $\bar{w}_q(G_{n,9}) \neq 0$

neme $\bar{w}_{72}(G_{18,8}) \neq 0$, teda $G_{18,8}$ by sa nedalo vnoriť do $\mathbb{R}^{151}$. Pritom je známe (poz. [35]), že $G_{18,8}$ sa dá vnoriť do $\mathbb{R}^{153}$.

Napokon ešte naznačme, ako by sa mohlo dať dokázať, že triedy $\bar{w}_q(G_{n,k})$ opísané v hypotéze sú nenulové. Jedna z možností, ako ukázať nenulovosť triedy, je použiť postup, pomocou ktorého sme dokázali vetu 3.1.4. Hlavnou myšlienkou je vynásobiť $\bar{w}_q(G_{n,k})$ vhodnou triedou u tak, aby súčin ležal v $H^{\mathrm{top}}(G_{n,k};\mathbb{Z}_2) \cong Z_2$, a potom metódou R. Stonga ukázať, že $\bar{w}_q(G_{n,k}) \cdot u \neq 0$. Otázkou je, ako zvoliť triedu u, ktorou násobíme. Výsledný súčin totiž môže byť pre nevhodne zvolené u nulový. Pre $k = 4$ a $n = 2^s + 2$ bola dobrá voľba $u = w_2^{2^s-8} w_4$ (poz. (3.2.1)), pre $k = 4$ a $n = 2^s + 3$ sme mali $u = w_1^{2^s-8} w_4$ (poz. (3.2.7)). Pre malé k a n sme skúsili za u zvoliť všetky možné hodnoty a na základe výpočtov vyslovujeme druhú hypotézu.

Hypotéza. *Ak* $2^s \geq 2k$ *a* $2^s \leq n \leq 2^s + k$, *tak pre* $q = k(2^s + k - n - 1) + 2^s(n - 2^s)$ *je trieda*

$$\bar{w}_q(G_{n,k}) \cdot w_{2^s+k-n}^{2^s-2k} w_k$$

v $H^{\mathrm{top}}(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ *nenulová.*

Táto hypotéza je potvrdená pre $k = 4$, $n = 2^s + 2, 2^s + 3$ a taktiež pre $k = 3, 4$, $s = 3, 4, 5$; $k = 5$, $s = 4$.

Literatúra

[1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. **75** (1962), 603–632.

[2] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Jap. J. Math., New Ser. **30** (2004), 29–73.

[3] M. F. Atiyah, J. L. Dupont, *Vector fields with finite singularities*, Acta Math. **128** (1972), 1–40.

[4] M. F. Atiyah, *Immersions and embeddings of manifolds*, Topology **1** (1962), 125–132.

[5] V. Bartík, J. Korbaš, *Stiefel-Whitney characteristic classes and parallelizability of Grassmann manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **33**, Suppl. 6 (1984), 19–29.

[6] A. Borel, *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 165–197.

[7] G. E. Bredon, A. Kosinski, *Vector fields on π-manifolds*, Ann. of Math. **84** (1966), 85–90.

[8] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, New York, 1993.

[9] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115.

[10] R. L. Cohen, *The immersion conjecture for differentiable manifolds*, Ann. of Math. **122** (1985), 237–328.

[11] A. Dold, *Erzeugende der Thomschen Algebra* $\mathfrak{N}$, Math. Z. **65** (1956), 25–35.

[12] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, V: Introduction á la théorie des fonctions d'une variable (ed. J. Tannery), Hermann, Paríž (1910).

[13] D. Handel, *$2k$-regular maps on smooth manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1609–1613.

[14] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[15] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, v príprave, dostupné na `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`.

[16] H. Hiller, R. E. Stong, *Immersion dimension for real Grassmannians*, Math. Ann. **255** (1981), 361–367.

[17] H. Hopf, *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **96** (1926), 225–250.

[18] W. C. Hsiang, R. H. Szczarba, *On the tangent bundle of a Grassman manifold*, Amer. J. Math. **86** (1964), 698–704.

[19] A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. **88** (1922), 1–25.

[20] D. Husemoller, *Fibre bundles*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1975.

[21] B. Junod, U. Suter, *On the vector field problem for product manifolds*, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 437–461.

[22] M. Kervaire, *Courbure intégrale généralisée et homotopie*, Math. Ann. **131** (1956), 219–252.

[23] M. Kervaire, *Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280–283.

[24] T. Kobayashi, *Non-immersion theorems for Dold manifolds*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math. **4** (1983), 1–7.

[25] J. Korbaš, P. Novotný, *On the dual Stiefel-Whitney classes of some Grassmann manifolds*, podané do tlače.

[26] J. Korbaš, A. Szűcs, *The Lyusternik-Shnirel'man category, vector bundles, and immersions of manifolds*, Manuscr. Math. **95** (1998), 289–294.

[27] J. Korbaš, P. Zvengrowski, *The vector field problem: A survey with emphasis on specific manifolds*, Expo. Math. **12** (1994), 3–30.

[28] J. Korbaš, P. Zvengrowski, *On sectioning tangent bundles and other vector bundles*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 39 (1996), 85–104.

[29] J. Korbaš, *Vector fields on real flag manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **3** (1985), 173–184.

[30] J. Korbaš, *On the Stiefel-Whitney classes and the span of real Grassmannians*, Czechoslovak Math. J. **36(111)** (1986), 541–552.

[31] J. Korbaš, *On sectioning multiples of vector bundles and more general homomorphism bundles*, Manuscripta Math. **82** (1994), 67–70.

[32] J. Korbaš, *Distributions, vector distributions, and immersions of manifolds in Euclidean spaces*, Kapitola 13 v: Handbook of Global Analysis (ed. D. Krupka a D. Saunders) Elsevier, Amsterdam (2007), 667–726.

[33] U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle morphisms - a singularity approach*, Lecture Notes in Math. 847, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[34] J. H. Kwak, *The parallelizability of Dold manifolds*, Kyungpook Math. J. **24** (1984), 17–24.

[35] K. Y. Lam, *A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 305–314.

[36] M. L. Leite, I. D. Miatello, *Linear vector fields on $\tilde{G}_k(R^n)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 673–677.

[37] Y. Matsushita, *Fields of 2-planes and two kinds of almost complex structures on compact 4-dimensional manifolds*, Math. Z. **207** (1991), 281–291.

[38] K. H. Mayer, *Nonimmersion theorems for Grassmann manifolds*, Topology Appl. **96** (1999), no. 2, 171–184.

[39] I. D. Miatello, R. J. Miatello, *On stable parallelizability of $\tilde{G}_{k,n}$ and related manifolds*, Math. Ann. **259** (1982), 343–350.

[40] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[41] J. W. Milnor, *Some consequences of a theorem of Bott*, Ann. of Math. **68** (1958), 444–449.

[42] K. G. Monks, *Groebner bases on the cohomology of Grassmann manifolds with application to immersion*, Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. **7** (2001), 123–136.

[43] H. K. Mukerjee, *Classification of homotopy Dold manifolds*, New York J. Math. **9** (2003), 271–293.

[44] T. B. Ng, *On the geometric dimension of vector bundles, span of a manifold and immersion of manifolds in manifolds*, Expo. Math. **8** (1990), 193–226.

[45] P. Novotný, *Span of Dold manifolds*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, vyjde 2008.

[46] V. Oproiu, *Some non-embedding theorems for the Grassmann manifolds $G_{2,n}$ and $G_{3,n}$*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **20** (1976-77), 177–185.

[47] V. Oproiu, *Some results concerning the non-embedding codimension of Grassmann manifolds in Euclidean spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **26** (1981), 275–286.

[48] H. Poincaré, *Analysis situs*, J. de l'Éc. Pol. (2) **1** (1895), 1–123.

[49] B. J. Pollina, *Tangent 2-fields on even-dimensional nonorientable manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), 215–224.

[50] J. Radon, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Hamb. Abh. **1** (1921), 1–14.

[51] D. Randall, *CAT 2-fields on nonorientable CAT manifolds*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **38** (1987), 355–366.

[52] D. Randall, *On indices of tangent fields with finite singularities*, Differential Topology (Siegen 1987), Lecture Notes in Math. 1350, Springer, Berlin (1988), 213–240.

[53] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–566.

[54] O. Saeki, *Fold maps on 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.

[55] P. Sankaran, P. Zvengrowski, *On stable parallelizability of flag manifolds*, Pac. J. Math. **122** (1986), 455–458.

[56] P. Sankaran, P. Zvengrowski, *Stable parallelizability of partially oriented flag manifolds*, Pac. J. Math. **128** (1987), 349–359.

[57] P. Sankaran, P. Zvengrowski, *Stable parallelizability of partially oriented flag manifolds II*, Can. J. Math. **49** (1997), 1323–1339.

[58] P. Sankaran, *Vector fields on flag manifolds*, Ph.D. práca, Univ. of Calgary, 1985.

[59] W. Singhof, D. Wemmer, *Parallelizability of homogeneous spaces, II*, Math. Ann. **274** (1986), 157–176.

[60] W. Singhof, D. Wemmer, *Parallelizability of homogeneous spaces, II (Erratum)*, Math. Ann. **276** (1987), 699–700.

[61] W. Singhof, *Parallelizability of homogeneous spaces, I*, Math. Ann. **260** (1982), 101–116.

[62] M.-Y. Sohn, *Span of product Dold manifolds*, Kyungpook Math. J. **31** (1991), 19–24.

[63] B. Steer, *Une interprétation géométrique des nombres de Radon-Hurwitz*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967), 209–218.

[64] R. E. Stong, *Cup products in Grassmannians*, Topology Appl. **13** (1982), 103–113.

[65] R. E. Stong, *Vector bundles over Dold manifolds*, Fund. Math. **169** (2001), 85–95.

[66] R. M. Switzer, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[67] Z. Tang, *Nonexistence of almost complex structures on Dold manifolds*, Sci. China Ser. A **39** (1996), 919–924.

[68] E. Thomas, *Fields of tangent 2-planes on even-dimensional manifolds*, Ann. of Math. **86** (1967), 349–361.

[69] E. Thomas, *Vector fields on low dimensional manifolds*, Math. Z. **103** (1968), 85–93.

[70] E. Thomas, *Vector fields on manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 643–683.

[71] W.-L. Ting, *On higher order nonsingular immersions of Dold manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **39** (1973), 195–200.

[72] S. Trew, P. Zvengrowski, *Non-parallelizability of Grassmann manifolds*, Can. Math. Bull. **27** (1984), 127–128.

[73] J. J. Ucci, *Immersions and embeddings of Dold manifolds*, Topology **4** (1965), 283–293.

[74] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space*, Ann. of Math. **45** (1944), 220–246.

[75] T. Yoshida, *Parallelizability of Grassmann manifolds*, Hiroshima Math. J. **5** (1975), 193–196.