Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
v Bratislave

písomná práca k dizertačnej skúške
a
projekt dizertačnej práce

2006

Mgr. Peter Novotný

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

písomná práca k dizertačnej skúške

a

projekt dizertačnej práce

Niektoré vlastnosti vektorových fibrácií

Vedný odbor: 11-16-9 Geometria a topológia
Doktorand: Mgr. Peter Novotný
Školiteľ: doc. RNDr. Július Korbaš, CSc.

Bratislava 2006

Obsah

I Písomná práca k dizertačnej skúške 3

Úvod **4**

1 Vektorové fibrácie **6**

1.1 Konštrukcie vektorových fibrácií 8
1.2 Charakteristické triedy vektorových fibrácií 12

2 Vektorové polia **16**

2.1 Rozpon vektorovej fibrácie 18
2.2 Rôzne prístupy k určeniu rozponu 19
2.3 Stabilný rozpon 21

3 Rozpon niektorých variet **23**

3.1 Vlajkové a orientované vlajkové variety 23
3.2 Grassmannove variety 24
3.3 Projektívne Stiefelove variety 26
3.4 Doldove variety 28
3.5 Homogénne priestory 30

II Projekt dizertačnej práce 31

4 Projekt dizertačnej práce **32**

4.1 Formulácia problému 32
4.2 Prehľad súčasného stavu problematiky a literatúra k nej 34
4.3 Očakávané výsledky a predpokladané metódy riešenia 35

Literatúra 36

Časť I

Písomná práca k dizertačnej skúške

Úvod

Diferenciálna topológia sa zaoberá vlastnosťami hladkých variet a zobrazení medzi nimi. Zaujímavou časťou tejto disciplíny je skúmanie vektorových polí na rôznych varietách. Jednou zo základných otázok je, aký je maximálny počet (pre danú varietu) všade lineárne nezávislých vektorových polí. Hoci má prirodzenú geometrickú interpretáciu, odpovedať na ňu nie je jednoduché. Pre existenciu *jedného* všade nenulového vektorového poľa existuje celkom uspokojivé kritérium (poz. vetu 2.4). Avšak otázka existencie dvoch, prípadne viacerých, všade lineárne nezávislých vektorových polí je pre mnohé variety otvorená. Pritom doteraz známe výsledky z tejto oblasti boli dosiahnuté najmä prostriedkami algebraickej topológie. Vektorové polia tak tvoria jeden z „mostov“, ktoré spájajú algebraickú a diferenciálnu topológiu.

História problému vektorových polí siaha do konca 19. storočia, teda do počiatkov samotnej algebraickej topológie, ktorej základy položil H. Poincaré v [36]. Práve Poincaré sa už v skoršej práci venoval vektorovým poliam na plochách a ukázal, že na dvojrozmernej sfére $\mathbf{S}^2$ neexistuje všade nenulové vektorové pole. Ukázal tiež, že jediná uzavretá plocha v $\mathbb{R}^3$, na ktorej všade nenulové vektorové pole existuje, je torus, t. j. plocha $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.

Na začiatku 20. storočia nadviazal na Poincarého výsledky L. E. J. Brouwer [9], keď rozšíril tvrdenie na viacrozmerné sféry – dokázal, že na sférach s párnou dimenziou neexistuje všade nenulové vektorové pole. V tom istom období J. Hadamard [13] sformuloval hypotézu zovšeobecňujúcu Poincarého tvrdenia pre kompaktné viacrozmerné variety vnorené do euklidovského priestoru. Kompletný dôkaz vety charakterizujúcej variety, na ktorých existuje všade nenulové vektorové pole, podal v dvadsiatych rokoch 20. storočia H. Hopf [14]. Tým bola otázka pre *jedno* vektorové pole vyriešená.

Prirodzene tak vyvstala úloha určiť pre danú n-rozmernú varietu maximálny možný počet nezávislých vektorových polí. Už pred tým, ako Hopf publikoval spomenutý všeobecný výsledok, bol vďaka A. Hurwitzovi [15] a J. Radonovi [37] známy čiastočný poznatok pre sféry. Z ich prác zo začiatku dvadsiatych rokov minulého storočia vyplývalo, že na sfére $\mathbf{S}^{n-1}$

existuje aspoň $\varrho(n) - 1$ všade lineárne nezávislých vektorových polí, pričom $\varrho(n)$ označuje tzv. *Hurwitzovo-Radonovo číslo* (poz. definíciu 2.1.5). Až o 40 rokov neskôr sa problém pre sféry podarilo úplne vyriešiť. Najskôr M. A. Kervaire [18] a J. Milnor [32] ukázali, že jediné sféry $\mathbf{S}^n$, na ktorých existuje n všade lineárne nezávislých vektorových polí (t. j. maximálny možný počet, keďže ich nemôže byť viac ako dimenzia variety), sú $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ a $\mathbf{S}^7$. Napokon J. F. Adams [1] dokázal, že maximálny počet pre sféru $\mathbf{S}^{n-1}$ je $\varrho(n) - 1$, teda že dolný odhad pochádzajúci od Hurwitza a Radona je v skutočnosti hľadané maximum.

Popri štúdiu sfér nastal určitý posun v poznaní aj pre všeobecné variety. V šesťdesiatych rokoch 20. storočia sa objavili viaceré čiastočné výsledky, najmä nutné a postačujúce podmienky pre existenciu dvoch všade lineárne nezávislých vektorových polí na orientovateľných varietách (poz. napr. E. Thomas [51]) a neskôr tiež tvrdenia o existencii troch či štyroch nezávislých vektorových polí tak na orientovateľných, ako aj na neorientovateľných varietách. Taktiež bol problém takmer úplne vyriešený pre variety s malou dimenziou (poz. E. Thomas [50]).

Vzhľadom na náročnosť odvodzovania kritérií pre existenciu väčšieho počtu nezávislých vektorových polí na všeobecných varietách sa v neskorších rokoch až po súčasnosť začali objavovať častejšie výsledky pre konkrétne triedy variet (podobné výsledkom pre triedu sfér). S niektorými takými poznatkami sa oboznámime v ďalšom texte.

Kapitola 1

Vektorové fibrácie

Definovať vektorové pole na danej variete znamená v každom bode variety (v spojitej závislosti od bodov) zvoliť jeden dotykový vektor (majúci „počiatok“ v tomto bode). Z množiny všetkých dotykových vektorov variety teda vyberáme len niektoré, robíme akýsi „rez“. Množina všetkých dotykových vektorov danej variety sa nazýva totálny priestor dotykovej fibrácie. Pri skúmaní vektorových polí teda skúmame „rezy“ dotykovej fibrácie (pojem rezu upresníme neskôr). Dotyková fibrácia je špeciálny prípad všeobecnejšieho pojmu, ktorý si teraz pripomenieme (definície, vety a dôkazy v tejto kapitole preberáme najmä z knihy [33]).

Definícia 1.1. Trojica $\xi = (E, \pi, B)$ sa nazýva *(reálna) vektorová fibrácia*, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) E a B sú topologické priestory a $\pi : E \to B$ je spojité zobrazenie;

(ii) pre každý bod $b \in B$ je $\pi^{-1}(b)$ vektorový priestor nad $\mathbb{R}$;

(iii) (podmienka *lokálnej triviálnosti*) pre každý bod $b \in B$ existuje jeho okolie $U \subset B$ také, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}_0$ existuje homeomorfizmus

$$h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

taký, že pre každé $b \in U$ je zobrazenie určené predpisom $x \mapsto h(b, x)$ izomorfizmom medzi vektorovými priestormi $\mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(b)$.

Priestor E sa označuje $E(\xi)$ a nazýva sa *totálny priestor*, priestor $B = B(\xi)$ je *báza* fibrácie a zobrazenie $\pi = \pi_\xi$ sa nazýva *projekcia*. Dvojica (U, h), ktorá podľa podmienky (iii) existuje pre každý bod $b \in B$, sa nazýva *lokálny súradnicový systém fibrácie* ξ *v bode* b. Vektorový priestor $\pi^{-1}(b)$ sa nazýva *fíber* nad bodom b a označuje sa F_b alebo $F_b(\xi)$.

Poznámka a definícia 1.2. V určitých prípadoch je možné za okolie U v podmienke (iii) predošlej definície zvoliť celý priestor B. Z lokálnej triviálnosti sa tak stane „globálna“ a zobrazenie h bude homeomorfizmom medzi priestormi $B \times \mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(B) = E$. Takejto vektorovej fibrácii budeme hovoriť *triviálna*.

Poznámka 1.3. Dimenzia fíbra nad bodom b, t. j. hodnota n z podmienky (iii) definície 1.1, je zrejme lokálne konštantná funkcia z B do $\mathbb{N}_0$. Teda už súvislosť priestoru B zabezpečí, že dimenzia fíbra je konštantná na celom B. Ak je dimenzia fíbra konštantná, nazýva sa *dimenzia vektorovej fibrácie*.

Podobným spôsobom ako v definícii 1.1 možno zaviesť pojem *hladká vektorová fibrácia*. Stačí pridať požiadavky, že E a B sú hladké variety, π je hladké zobrazenie a h z podmienky (iii) je difeomorfizmus.

Vo viacerých situáciách sa stretneme s rôznymi vektorovými fibráciami nad tým istým bázovým priestorom. Pri ďalších úvahách preto pomôže, keď ich istým spôsobom roztriedime.

Definícia 1.4. Dve vektorové fibrácie ξ a η nad tým istým bázovým priestorom B sú navzájom *izomorfné* (ozn. $\xi \cong \eta$), ak existuje homeomorfizmus $f : E(\xi) \to E(\eta)$, ktorého zúženie na fíber nad každým bodom b je izomorfizmom vektorových priestorov $F_b(\xi)$ a $F_b(\eta)$. Izomorfné vektorové fibrácie budeme často považovať za totožné.

Uveďme teraz niekoľko príkladov vektorových fibrácií.

Príklad 1.5. Pre každú hladkú uzavretú súvislú varietu M jej *dotyková fibrácia* τ_M je vektorovou fibráciou s bázovým priestorom M; jej dimenzia sa rovná dimenzii variety M. Jej totálny priestor je dotyková varieta TM pozostávajúca z dvojíc (b, v), pričom $b \in M$ a v je dotykový vektor k M v bode b. Projekciou je zobrazenie definované predpisom $\pi(b, v) = b$. Fíbrom v bode b je dotykový priestor M_b (t. j. množina dotykových vektorov k M v bode b). Poznamenajme, že τ_M je príkladom hladkej vektorovej fibrácie.

V ďalšom texte zakaždým, keď budeme hovoriť o variete, budeme mať na mysli hladkú uzavretú (t. j. kompaktnú a bez okraja) súvislú varietu.

Príklad a definícia 1.6. Pre ľubovoľnú bázu B môžeme ako totálny priestor zvoliť $B \times \mathbb{R}^n$. Projekciou bude zobrazenie $\pi(b, x) = b$ a fíbrom v ľubovoľnom bode b bude množina

$\{b\} \times \mathbb{R}^n$, ktorá má prirodzenú štruktúru vektorového priestoru. Dostaneme tak triviálnu vektorovú fibráciu, ktorú budeme označovať ε^n_B, alebo len ε^n, ak je bázový priestor zrejmý. Rozšírime pojem triviálnej vektorovej fibrácie: v súlade s definíciou 1.4, n-rozmerná vektorová fibrácia nad B sa nazýva triviálna, ak je izomorfná s ε^n_B.

Dotyková fibrácia τ_M je pre niektoré variety M triviálna. V takom prípade o M hovoríme, že je *paralelizovateľná*. To, či je daná varieta paralelizovateľná, úzko súvisí s problémom vektorových polí, ktorému sa začneme venovať v nasledujúcej kapitole.

Príklad 1.7. Stotožnením protiľahlých bodov sféry $\mathbf{S}^n$ získame *reálny projektívny priestor* $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. Presnejšie,

$$\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \{\{\pm x\};\ x \in \mathbf{S}^n\},$$

pričom topológia na $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ je faktorovou topológiou sféry $\mathbf{S}^n$ podľa relácie generovanej dvojicami $x \sim -x$. K bázovému priestoru $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ priraďme ako totálny priestor podmnožinu $\mathbb{R}\mathbf{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ pozostávajúcu z takých dvojíc $(\{\pm x\}, v)$, že vektor v je násobkom x. Projekciou bude zobrazenie $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$. Teda každý fíber nad $\{\pm x\}$ je množina násobkov x, čo je vlastne priamka v $\mathbb{R}^{n+1}$ prechádzajúca cez x a $-x$ so zvyčajnou štruktúrou (jednorozmerného) vektorového priestoru. Overíme, že je splnená aj podmienka lokálnej triviálnosti. K ľubovoľnému bodu z $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ zoberieme také „dostatočne malé“ okolie U, že jeho vzor U' v $\mathbf{S}^n$ neobsahuje žiadne dva protiľahlé body. Potom môžeme definovať homeomorfizmus $h : U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U)$ predpisom

$$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx) \qquad \text{pre všetky } (x, t) \in U' \times \mathbb{R}.$$

Dvojica (U, h) spĺňa všetky podmienky lokálneho súradnicového systému, teda dostávame jednorozmernú vektorovú fibráciu. Označíme ju γ^1_n; nazýva sa *kanonická jednorozmerná fibrácia nad* $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. Neskôr ukážeme, že pre $n \geq 1$ je netriviálna.

1.1 Konštrukcie vektorových fibrácií

V doterajších príkladoch sme vždy začali s nejakým bázovým priestorom a k nemu sme následne priradili vektorovú fibráciu. Pri takto získaných fibráciách musíme vždy ukázať, že spĺňajú podmienky definície 1.1. Uveďme teraz niekoľko univerzálnych konštrukcií, ktorými možno vytvoriť nové vektorové fibrácie z pôvodných.

Definícia 1.1.1. Nech $\xi = (E, \pi, B)$ je vektorová fibrácia a $\bar{B}$ podmnožina B. Položme $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$. Nech $\bar{\pi} : \bar{E} \to \bar{B}$ je zúženie π na množinu $\bar{E}$. Potom trojica $(\bar{E}, \bar{\pi}, \bar{B})$ je vektorová fibrácia, ktorú označujeme $\xi_{|\bar{B}}$ a nazývame *zúženie* ξ *na* $\bar{B}$. Fíber $F_b(\xi_{|\bar{B}})$ je totožný s fíbrom $F_b(\xi)$.

Zúženie fibrácie na podpriestor je špeciálny prípad nasledujúcej všeobecnejšej konštrukcie.

Definícia 1.1.2. Nech $\xi = (E, \pi, B)$ je vektorová fibrácia a B_1 ľubovoľný topologický priestor. Nech $f : B_1 \to B$ je ľubovoľné spojité zobrazenie. Označme $E_1 \subset B_1 \times E$ množinu tých dvojíc (b, e), pre ktoré $f(b) = \pi(e)$. Projekciu $\pi_1 : E_1 \to B_1$ definujme predpisom $\pi_1(b, e) = b$. Vektorovú fibráciu $f^*\xi = (E_1, \pi_1, B_1)$ budeme nazývať *indukovaná fibrácia* (presnejšie: vektorová fibrácia indukovaná z fibrácie ξ zobrazením f).

To, že $f^*\xi$ je skutočne vektorová fibrácia, možno nahliadnuť z komutatívneho diagramu

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

v ktorom $\hat{f}(b, e) = e$. Na fíbri $F_b(f^*\xi)$ je štruktúra vektorového priestoru definovaná prirodzene tak, aby $\hat{f}$ zobrazovalo fíber $F_b(f^*\xi)$ izomorfne na fíber $F_{f(b)}(\xi)$. Lokálny súradnicový systém (U_1, h_1) v bode $b \in B_1$ získame z lokálneho súradnicového systému (U, h) v bode $f(b)$; stačí položiť $U_1 = f^{-1}(U)$ a definovať $h_1 : U_1 \times R^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$ predpisom $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$. Všimnime si tiež, že ak ξ je triviálna vektorová fibrácia, tak je triviálna aj $f^*\xi$.

Keď v predošlej definícii zvolíme za f vloženie $i : \bar{B} \hookrightarrow B$, dostaneme fibráciu $i^*\xi$, ktorá je izomorfná s $\xi_{|\bar{B}}$. Na dôležitosť indukovanej fibrácie upozorňuje ďalšia definícia a tvrdenie.

Definícia 1.1.3. Majme dve vektorové fibrácie η a ξ. Spojité zobrazenie $g : E(\eta) \to E(\xi)$, ktorého zúženie na každý fíber nad bodom b je izomorfizmom medzi $F_b(\eta)$ a nejakým $F_{b'}(\xi)$, sa nazýva *fíbre zachovávajúce zobrazenie z* η *do* ξ. Zrejme príslušné zobrazenie $\bar{g} : B(\eta) \to$ $\to B(\xi)$ spĺňajúce $\bar{g}(b) = b'$ je tiež spojité.

Veta 1.1.4. *Ak* $g : E(\eta) \to E(\xi)$ *je fíbre zachovávajúce zobrazenie a* $\bar{g} : B(\eta) \to B(\xi)$ *príslušné zobrazenie medzi bázovými priestormi, tak* $\eta \cong \bar{g}^*\xi$.

Dôkaz. Zoberme $h : E(\eta) \to E(\bar{g}^*\xi)$ určené predpisom $h(e) = (\pi_\eta(e), g(e))$. Zrejme h je fíbre zachovávajúce. Zostáva ukázať, že h^{-1} je spojité. Uvažujme ľubovoľný bod $h(e) = e' \in E(\bar{g}^*\xi)$. Z lokálnej triviálnosti oboch fibrácií máme okolie U bodu $\pi_{\bar{g}^*\xi}(e') = \pi_\eta(e)$ a homeomorfizmy f, f', ktoré spolu s h dávajú spojité zobrazenie

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f'} \pi_\eta^{-1}(U) \xrightarrow{h} \pi_{\bar{g}^*\xi}^{-1}(U) \xrightarrow{f^{-1}} U \times \mathbb{R}^n,$$

ktoré je na každom fíbri $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ izomorfizmom. Možno teda písať

$$f^{-1}(h(f'(b, x_1, \dots, x_n))) = (b, (x_1, \dots, x_n) \cdot A(b)),$$

pričom $A(b)$ je regulárna matica, ktorá je navyše spojito závislá od b. Potom zjavne

$$f'^{-1}(h^{-1}(f(b, x_1, \dots, x_n))) = (b, (x_1, \dots, x_n) \cdot A^{-1}(b)),$$

pričom závislosť inverznej matice $A^{-1}(b)$ od b je opäť spojitá. Takže zobrazenie $f'^{-1} \circ h^{-1} \circ f$ je spojité, a keďže f a f' sú homeomorfizmy, je h^{-1} spojité. $\square$

Pomocou indukovanej fibrácie možno vytvoriť aj „súčet“ dvoch fibrácií, ale najskôr si ukážeme jeho konštrukciu bez nej.

Definícia 1.1.5. Nech ξ a η sú vektorové fibrácie nad tým istým bázovým priestorom B. Ich *priamy súčet* $\xi \oplus \eta$ je vektorová fibrácia nad B s totálnym priestorom

$$E(\xi \oplus \eta) = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\eta);\ \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2)\}$$

a projekciou definovanou predpisom $\pi_{\xi\oplus\eta}(e_1, e_2) = \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2)$. Fíber nad bodom b je vektorový priestor $F_b(\xi \oplus \eta) \cong F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$. Tejto vektorovej fibrácii budeme hovoriť tiež *Whitneyho súčet* ξ a η.

Rovnakú fibráciu ako v predošlej definícii dostaneme vytvorením indukovanej fibrácie $d^*(\xi \times \eta)$, kde $d : B \to B \times B$ je diagonálne zobrazenie určené predpisom $d(x) = (x, x)$ a $\xi \times \eta$ je fibrácia

$$(E(\xi) \times E(\xi), \pi_\xi \times \pi_\eta, B \times B).$$

Lokálna triviálnosť fibrácie $\xi \times \eta$ je zrejmá. Tým sme zároveň zdôvodnili lokálnu triviálnosť fibrácie $\xi \oplus \eta$.

Na množine všetkých fibrácií nad daným bázovým priestorom tak máme binárnu operáciu $\oplus$, ktorá na úrovni dimenzie korešponduje s klasickým sčítaním (t. j. dimenzia fibrácie $\xi \oplus \eta$ je súčtom dimenzií fibrácií ξ a η) a na úrovni fíbrov s priamym súčtom vektorových priestorov. Ak je bázový priestor B kompaktný, získa operácia $\oplus$ ďalšiu vlastnosť sformulovanú v nasledujúcom tvrdení.

Veta 1.1.6. *Ku každej vektorovej fibrácii ξ nad kompaktným priestorom B existuje taká vektorová fibrácia η nad B, že $\xi \oplus \eta$ je triviálna. Fibráciu η nazveme komplement alebo doplnok fibrácie ξ.*

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľnú vektorovú fibráciu ξ s dimenziou n a kompaktnou bázou B. Vďaka kompaktnosti možno spomedzi všetkých lokálnych súradnicových systémov (U, h) vybrať konečný systém $\{(U_i, h_i)\}_{i=1}^m$ taký, že $\{U_i\}_{i=1}^m$ je (otvorené) pokrytie priestoru B. Pre toto pokrytie zostrojíme podriadený rozklad jednotky, t. j. funkcie $\varphi_i : B \to \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, \dots, m$, také, že

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{pre každé } x \in B,$$

pričom uzáver množiny $\{x \in B;\ \varphi_i(x) \neq 0\}$ leží celý v U_i. Komplement η budeme hľadať tak, aby bolo $\xi \oplus \eta \cong \varepsilon_B^{nm}$. Vhodné bude, keď najskôr vložíme ξ do $B \times \mathbb{R}^{nm}$. Na to nám poslúži zobrazenie $H : E(\xi) \to B \times \mathbb{R}^{nm}$ definované predpisom

$$H(u) = (\pi_\xi(u), \varphi_1(\pi_\xi(u))v_1, \dots, \varphi_m(\pi_\xi(u))v_m)\,,$$

pričom v_i je ten vektor z $\mathbb{R}^n$, pre ktorý platí $h_i(\pi_\xi(u), v_i) = u$, ak $\pi_\xi(u) \in U_i$, resp. $v_i = \vec{0}$ ak $\pi_\xi(u) \notin U_i$ (v druhom prípade je voľba v_i nepodstatná, keďže vtedy $\varphi_i(\pi_\xi(u)) = 0$). H zobrazuje fíbre na fíbre, a keďže h_i je lokálny súradnicový systém, priradenie $u \mapsto v_i$ je na každom fíbri lineárny izomorfizmus. Keď teda zúžime H na fíber nad daným bodom b, dostaneme monomorfizmus $F_b(\xi) \to F_b(\varepsilon_B^{nm})$. Zostrojme teraz totálny priestor

$$E(\eta) = \left\{(b, v) \in B \times \mathbb{R}^{nm};\ v \perp H\left(\pi_\xi^{-1}(b)\right)\right\}$$

(kolmosť berieme vzhľadom na štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^{nm}$). Ľahko možno nahliadnuť, že pre $\pi_\eta : E(\eta) \to B$ spĺňajúce $\pi_\eta(b, v) = b$ je $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, B)$ vektorová fibrácia a že $\xi \oplus \eta \cong B \times \mathbb{R}^{nm}$. $\square$

Podobným spôsobom, akým sme k fibráciám ξ a η nad B priradili fibráciu $\xi \oplus \eta$ s fíbrom $F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$, možno vytvoriť tenzorový súčin fibrácií $\xi \otimes \eta$, duálnu fibráciu $\mathrm{Hom}(\xi, \mathbb{R})$, vonkajšiu mocninu $\Lambda^k \xi$ a ďalšie konštrukcie. Podrobnejšie informácie sú napr. v [33].

1.2 Charakteristické triedy vektorových fibrácií

Odpoveď na niektoré otázky týkajúce sa variety často poskytne nejaký „algebraický invariant“, t. j. čiastočná informácia o variete, vyjadrená ako algebraický objekt (číslo, grupa, okruh, ...) – na základe hodnoty takého invariantu možno niekedy určiť, či varieta má alebo nemá danú vlastnosť. Medzi invarianty dôležité pri skúmaní vlastností vektorovej fibrácie patria kohomologické charakteristické triedy. Niektoré z nich pripomenieme.

Stiefelove-Whitneyho triedy

Definícia 1.2.1. Pre všetky vektorové fibrácie ξ majme postupnosti kohomologických tried

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2), \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ak tieto postupnosti spĺňajú podmienky

(i) $w_0(\xi) = 1$ a $w_i(\xi) = 0$ pre i väčšie ako dimenzia ξ;

(ii) ak $f : B(\xi) \to B(\eta)$ je zobrazenie prislúchajúce k nejakému fíbre zachovávajúcemu zobrazeniu z ξ do η, tak $w_i(\xi) = f^*(w_i(\eta))$;

(iii) (*Whitneyho veta o súčine*) ak ξ a η sú vektorové fibrácie nad tým istým bázovým priestorom, tak

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

(symbol „$\cup$“ označujúci kohomologický súčin budeme často vynechávať);

(iv) $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$, kde γ_1^1 je fibrácia z príkladu 1.7,

nazveme $w_i(\xi)$ *Stiefelove-Whitneyho triedy* fibrácie ξ. Ak ξ je dotyková fibrácia variety M, namiesto $w_i(\xi)$ píšeme zvyčajne $w_i(M)$.

Dôkaz existencie a jednoznačnosti týchto tried možno nájsť v [33]. Priamo z podmienok predošlej definície ľahko vyplývajú niektoré zaujímavé poznatky.

Dôsledok 1.2.2. *Ak $\xi \cong \eta$, tak $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.* □

Dôsledok 1.2.3. *Pre triviálnu fibráciu ε platí $w_i(\varepsilon) = 0$ pre $i > 0$.* □

Dôsledok 1.2.4. *Ak ε je triviálna fibrácia, tak $w_i(\varepsilon \oplus \xi) = w_i(\xi)$.* □

Keďže Stiefelove-Whitneyho triedy fibrácií nad daným bázovým priestorom možno medzi sebou násobiť (a tie s rovnakým indexom sčítať), možno sa na postupnosť týchto tried pre danú fibráciu pozrieť ako na prvok okruhu pozostávajúceho z formálnych nekonečných radov tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, pričom $a_i \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$. Súčin na tomto okruhu je definovaný predpisom

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i = (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots$$

Asociatívnosť vyplýva z asociatívnosti kohomologického súčinu. Keďže grupa koeficientov je $\mathbb{Z}_2$ a kohomologický súčin je až na znamienko komutatívny, je daný okruh komutatívny. Môžeme teda hovoriť o *totálnej* (alebo *úplnej*) *Stiefelovej-Whitneyho triede* n-rozmernej fibrácie ξ ako o prvku

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi) + 0 + \dots \tag{1.2.5}$$

uvedeného okruhu. Whitneyho vetu o súčine z definície 1.2.1 tak možno prepísať do tvaru

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) w(\eta). \tag{1.2.6}$$

K prvkom tvaru (1.2.5) pritom môžeme vypočítať inverzné prvky, a to buď induktívne postupným spĺňaním rovností

$$w_1 + \bar{w}_1 = 0, \quad w_2 + w_1 \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = 0, \quad w_3 + w_2 \bar{w}_1 + w_1 \bar{w}_2 + \bar{w}_3 = 0, \quad \dots$$

(pričom $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots$ je hľadaný inverzný prvok), alebo priamo rozvojom výrazu $(1+(w_1+w_2+\dots))^{-1}$ do formálneho geometrického radu. To nám poskytuje účinnú metódu na počítanie Stiefelových-Whitneyho tried fibrácie η, ak ich poznáme pre fibrácie ξ a $\xi \oplus \eta$; z (1.2.6) totiž máme $w(\eta) = \bar{w}(\xi) w(\xi \oplus \eta)$. V prípade, že $\xi \oplus \eta$ je triviálna, máme priamo $w(\eta) = \bar{w}(\xi)$.

Príklad 1.2.7. Pri štandardnom vložení $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je jednorozmerná normálová fibrácia ν triviálna a takisto aj $\nu \oplus \tau_{\mathbf{S}^n}$. Preto aj $w(\mathbf{S}^n) = 1$. Len na základe Stiefelových-Whitneyho tried teda dotykovú fibráciu sféry neodlíšime od triviálnej fibrácie.

Eulerova trieda

Stiefelove-Whitneyho triedy sú prvkami kohomologických grúp s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$. Pri skúmaní vektorových fibrácií sú často užitočné aj ďalšie charakteristické triedy, ktoré majú za grupu koeficientov celé čísla. Jednou z nich je Eulerova trieda. Na jej zavedenie potrebujeme, aby skúmaná vektorová fibrácia bola orientovaná (aby sme sa vyhli skrúteným koeficientom).

Definícia 1.2.8. *Orientácia* vektorovej fibrácie ξ je zobrazenie, ktoré každému fíbru priraďuje orientáciu (v zmysle orientácie vektorového priestoru) a spĺňa podmienku „lokálnej kompatibility“: Ku každému bodu $b_0 \in B(\xi)$ existuje jeho lokálny súradnicový systém (U, h) taký, že pre každý bod $b \in U$ príslušný izomorfizmus $x \mapsto h(b, x)$ z $\mathbb{R}^n$ do $F_b(\xi)$ zachováva orientáciu (pritom priestor $\mathbb{R}^n$ je štandardne orientovaný).

Pre n-rozmerný vektorový priestor V označujme V_0 množinu nenulových vektorov z V. Zvolenie orientácie V je ekvivalentné zvoleniu jedného generátora $u_V \in H^n(V, V_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Orientácia vektorovej fibrácie je v tomto zmysle zvolenie generátora $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ pre každý fíber F. Dá sa dokázať (poz. [33]), že pre každú orientovanú vektorovú fibráciu ξ dimenzie n s totálnym priestorom E existuje jediná trieda $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$, ktorej zúženie $u_{|(F,F_0)}$ je práve u_F pre každý fíber F (E_0 je množina nenulových prvkov z E, t. j. zjednotenie všetkých F_0). Táto trieda umožňuje definovať novú charakteristickú triedu.

Definícia 1.2.9. *Eulerova trieda* n-rozmernej orientovanej vektorovej fibrácie $\xi = (E, \pi, B)$ je tá trieda $e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z})$, ktorá sa pri kanonickom izomorfizme $\pi^* : H^n(B; \mathbb{Z}) \to$ $\to H^n(E; \mathbb{Z})$ zobrazí na $u_{|E}$.

Uveďme niektoré vlastnosti Eulerovej triedy:

(i) ak $f : B(\xi) \to B(\eta)$ je zobrazenie prislúchajúce k nejakému orientáciu a fíbre zachovávajúcemu zobrazeniu z ξ do η, tak $e(\xi) = f^*(e(\eta))$;

(ii) $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \cup e(\eta)$;

(iii) prirodzený homomorfizmus (redukcia mod 2) $H^n(B; \mathbb{Z}) \to H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ zobrazuje $e(\xi)$ na $w_n(\xi)$.

Chernove triedy

Stručne naznačme postup, ako možno pomocou Eulerovej triedy zostrojiť ďalšie charakteristické triedy. Keď pole $\mathbb{R}$ v definícii 1.1 nahradíme poľom komplexných čísel $\mathbb{C}$, dostaneme definíciu *komplexnej vektorovej fibrácie*. Z reálnej n-rozmernej vektorovej fibrácie možno takú fibráciu (s komplexnou dimenziou n) získať *komplexifikáciou* (poz. §15 v [33]). Komplexnú vektorovú fibráciu dimenzie n dostaneme tiež z takej reálnej fibrácie dimenzie $2n$, pre ktorú existuje automorfizmus $J : E \to E$ taký, že $J \circ J = -\mathrm{id}_E$. Naopak, keď si „prestaneme všímať“ komplexnú štruktúru, z každej komplexnej n-rozmernej fibrácie ω dostaneme reálnu fibráciu $\omega_{\mathbb{R}}$ dimenzie $2n$. Takáto fibrácia má navyše kanonickú orientáciu (dôkaz je napr. v [33]) a teda aj Eulerovu triedu $e(\omega_{\mathbb{R}}) \in H^{2n}(B;\mathbb{Z})$.

Nové charakteristické triedy sa definujú induktívne. Ku komplexnej n-rozmernej fibrácii $\omega = (E, \pi, B)$ najprv zostrojíme $(n-1)$-rozmernú (komplexnú) fibráciu ω_0, ktorej bázový priestor bude E_0. Bod v E_0 je určený fíbrom F fibrácie ω a nenulovým vektorom v tohto fíbra. Za fíber v ω_0 nad v zoberieme faktorový vektorový priestor $F/[v]$ (pričom $[v]$ je jednorozmerný podpriestor všetkých komplexných násobkov v). Z Gysinovej postupnosti orientovanej vektorovej fibrácie $\omega_{\mathbb{R}}$ dostaneme pre $i < n$ izomorfizmus $\pi_0^* : H^{2i}(B;\mathbb{Z}) \to$ $\to H^{2i}(E_0;\mathbb{Z})$ (π_0 je zúženie π na E_0).

Definícia 1.2.10. *Chernove triedy* komplexnej vektorovej fibrácie ω dimenzie n sú postupnosť $c_i(\omega) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$, pričom

$$c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}}), \qquad c_i(\omega) = \pi_0^{*-1} c_i(\omega_0) \text{ pre } i < n \qquad \text{a} \qquad c_i(\omega) = 0 \text{ pre } i > n.$$

Podobne ako pri Stiefelových-Whitneyho triedach môžeme utvoriť *totálnu (úplnú) Chernovu triedu* ako formálny súčet $c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + \cdots + c_n(\omega)$ a chápať ho ako prvok okruhu pozostávajúceho z formálnych nekonečných radov tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, pričom $a_i \in H^i(B;\mathbb{Z})$. Taktiež $c(\omega) = f^* c(\phi)$ pre zobrazenie f prislúchajúce k fíbre zachovávajúcemu zobrazeniu z ω do ϕ. Napokon, ak ω a ϕ sú komplexné vektorové fibrácie nad spoločným parakompaktným priestorom B, tak $c(\omega \oplus \phi) = c(\omega)c(\phi)$.

Pontrjaginove triedy

Vráťme sa teraz k reálnym vektorovým fibráciám. K ľubovoľnej reálnej n-rozmernej vektorovej fibrácii ξ možno vytvoriť jej komplexifikáciu $\xi \otimes \mathbb{C}$, t. j. komplexnú n-rozmernú (nad $\mathbb{C}$) vektorovú fibráciu nad tým istým bázovým priestorom s fíbrami $F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Definícia 1.2.11. Pre reálnu vektorovú fibráciu ξ triedu $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in$ $\in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$ nazývame *i-ta Pontrjaginova trieda*. Formálny súčet $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots +$ $+ p_{\lfloor n/2 \rfloor}(\xi)$ nazývame *totálna*, resp. *úplná Pontrjaginova trieda*. Pritom $\lfloor n/2 \rfloor$ je celá časť čísla $n/2$.

Opäť máme $p(\xi) = f^* p(\eta)$ pre f patriace k fíbre zachovávajúcemu zobrazeniu z ξ do η. Vzťah pre $p(\xi \oplus \eta)$ je zložitejší ako pri predošlých triedach: pri parakompaktnom B platí $2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.

Kapitola 2

Vektorové polia

Ako sme spomenuli na začiatku predošlej kapitoly, namiesto o vektorových poliach na variete budeme hovoriť o rezoch dotykovej fibrácie danej variety. Presnejšie, máme nasledujúcu definíciu.

Definícia 2.1. Majme vektorovú fibráciu $\xi = (E, \pi, B)$. *Rez* fibrácie ξ je každé spojité zobrazenie $s : B \to E$ spĺňajúce $\pi(s(b)) = b$ pre všetky $b \in B$. Rez je *všade nenulový*, ak $s(b)$ je pre každé b nenulový vektor fíbra F_b. Ak M je varieta a τ_M je jej dotyková fibrácia, tak rezy fibrácie τ_M sú *vektorové polia* na variete M.

Zrejme každá vektorová fibrácia má aspoň jeden rez, konkrétne nulový rez. Zaujímavé sú však práve všade nenulové rezy. Od „niekde nulových" rezov ich odlišuje napríklad to, že z nich vieme zostrojiť „jednotkový" rez, t. j. rez, ktorého hodnota v každom bode je vektor veľkosti 1. Konštrukcia je jednoduchá: stačí namiesto rezu s zobrať rez s' definovaný predpisom $s'(x) = s(x)/\|s(x)\|$. Uveďme si príklad fibrácie, ktorá všade nenulový rez nemá.

Veta 2.2. *Vektorová fibrácia γ_n^1 pre $n \geq 1$ nemá všade nenulový rez.*

Dôkaz. Nech $s : \mathbb{R}\mathbf{P}^n \to E(\gamma_n^1)$ je ľubovoľný rez. Uvažujme štandardnú projekciu

$$p : \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}\mathbf{P}^n, \qquad p(x) = \{\pm x\}.$$

Zloženie $s \circ p$ priradí každému $x \in \mathbf{S}^n$ nejaký prvok $(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(\gamma_n^1)$, pričom $t(x)$ je spojitá reálna funkcia. Navyše, keďže $p(x) = p(-x)$, tak $t(-x) = -t(x)$. Zo súvislosti $\mathbf{S}^n$ dostávame, že existuje x_0 také, že $t(x_0) = 0$. Teda $s(\{\pm x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$ a rez s je v bode $\{\pm x_0\}$ nulový. $\square$

Dôsledok 2.3. *Fibrácia γ_n^1 nie je triviálna.*

Dôkaz. Triviálna fibrácia $\mathbb{R}\mathbf{P}^n \times \mathbb{R}$ zjavne nejaký všade nenulový rez s má. Ak by sme mali izomorfizmus $\mathbb{R}\mathbf{P}^n \times \mathbb{R} \cong \gamma_n^1$ realizovaný homeomorfizmom f, tak zrejme rez $f \circ s : \mathbb{R}\mathbf{P}^n \to$ $\to E(\gamma_n^1)$ by bol všade nenulový, čo je v spore s predošlou vetou. □

Vráťme sa k varietám. Pre existenciu všade nenulového rezu dotykovej fibrácie, t. j. vektorového poľa, máme nasledovné kritérium od H. Hopfa [14].

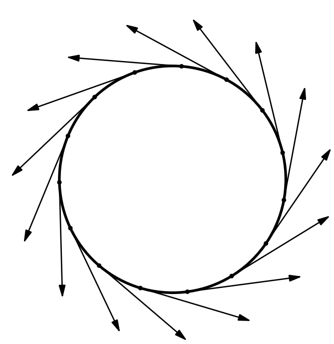
Veta 2.4 (Hopfova). *Na variete M existuje všade nenulové vektorové pole práve vtedy, keď $\chi(M) = 0$, pričom $\chi(M)$ je Eulerova charakteristika, t. j. $\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i$ (číslo n je dimenzia M a b_i je i-te Bettiho číslo, teda dimenzia $H_i(M, F)$ pre ľubovoľné pole F).*

V prípade, že M je konečný *CW-komplex* (poz. napr. [7]), môžeme $\chi(M)$ vyčísliť priamo z počtu buniek v jednotlivých dimenziách: $\chi(M) = \sum(-1)^i a_i$, pričom a_i je počet buniek dimenzie i. Teda priamo z geometrických vlastností variety môžeme niekedy zistiť (ak poznáme bunkový rozklad variety), či na nej nenulové vektorové pole existuje.

Príklad 2.5. Pre párne n máme $\chi(\mathbf{S}^n) = 2$, zatiaľ čo pre nepárne n máme $\chi(\mathbf{S}^n) = 0$. Všade nenulové vektorové pole preto existuje len na sférach s nepárnou dimenziou. Pre nepárne n vieme také vektorové pole s ľahko zostrojiť, stačí položiť

$$s(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{n+1}, x_n).$$

Vektorové pole, ktoré takto dostaneme pre $n = 1$, je znázornené na obr. 1.



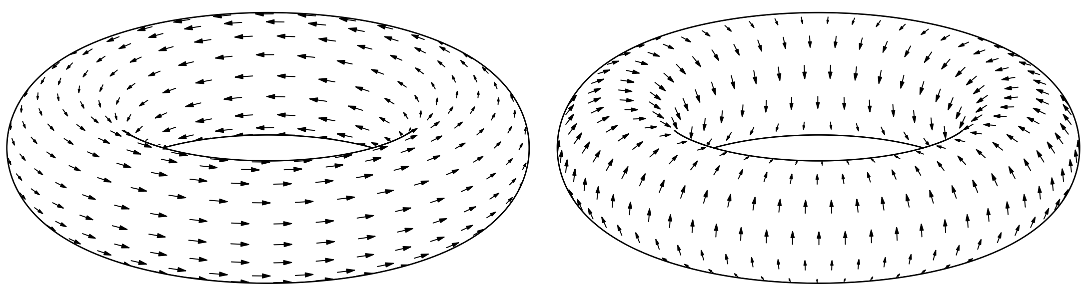
Obr. 1: *Všade nenulové vektorové pole na $\mathbf{S}^1$.*

2.1 Rozpon vektorovej fibrácie

Ak všade nenulový rez danej fibrácie existuje, má zmysel pýtať sa, či existuje aj nejaký ďalší rez, ktorého vektory majú v každom bode iný smer ako vektory prvého rezu. Túto úvahu možno rozšíriť na ľubovoľný počet rezov.

Definícia 2.1.1. Nech $s_1, \dots, s_k$ sú rezy danej vektorovej fibrácie ξ. Hovoríme, že tieto rezy sú *všade nezávislé*, ak pre každý bod $b \in B(\xi)$ sú vektory $s_1(b), \dots, s_k(b)$ lineárne nezávislé.

Ak má fibrácia dimenziu n, neexistuje vo fíbri viac ako n lineárne nezávislých vektorov. Dimenzia fibrácie je teda horným ohraničením pre maximálny možný počet všade nezávislých rezov.



Obr. 2: *Dve nezávislé vektorové polia na toruse.*

Veta 2.1.2. *Vektorová fibrácia s dimenziou n má n všade nezávislých rezov práve vtedy, keď je triviálna.*

Dôkaz. Nech $s_1, \dots, s_n$ sú všade nezávislé rezy fibrácie $\xi = (E, \pi, B)$. Vezmime zobrazenie

$$f : B \times \mathbb{R}^n \to E, \qquad f(b, x_1, \dots, x_n) = x_1 s_1(b) + \cdots + x_n s_n(b).$$

Toto zobrazenie je spojité a zobrazuje fíbre triviálnej fibrácie ε^n_B izomorfne na fíbre ξ, je teda fíbre zachovávajúcim zobrazením z ε^n_B do ξ. Rovnakým spôsobom ako v dôkaze vety 1.1.4 možno ukázať, že aj f^{-1} je spojité. Takže f je homeomorfizmus realizujúci $\varepsilon^n_B \cong \xi$.

Naopak, ak $\xi = (E, \pi, B)$ je triviálna so súradnicovým systémom (B, h), môžeme položiť

$$s_i = h(b, 0, \dots, 0, \underset{i\text{-ta pozícia}}{1}, 0, \dots, 0) \in F_b(\xi).$$

Zrejme $s_1, \dots, s_n$ sú všade nezávislé rezy ξ. $\square$

Dôsledok 2.1.3. *Varieta dimenzie n je paralelizovateľná práve vtedy, keď na nej existuje n všade nezávislých vektorových polí.* $\square$

Príkladom paralelizovateľnej variety je torus, t. j. varieta $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ (poz. obr. 2).

Zaveďme teraz osobitné označenie pre základnú vlastnosť vektorovej fibrácie, ktorú budeme skúmať.

Definícia 2.1.4. Maximálny možný počet všade nezávislých rezov vektorovej fibrácie ξ nazývame *rozpon fibrácie* a označujeme $\operatorname{span}\xi$. Pod rozponom variety M (ozn. $\operatorname{span} M$) rozumieme rozpon jej dotykovej fibrácie τ_M.

Z doterajšieho vieme, že pre každú n-rozmernú fibráciu ξ platí $0 \leq \operatorname{span}\xi \leq n$. Taktiež vieme, že rozpon sa rovná dimenzii len pre triviálne fibrácie a paralelizovateľné variety (samozrejme, nemusí byť jednoduché zistiť, či je fibrácia triviálna). Pre fibrácie a variety, ktoré sme doteraz spomenuli, máme $\operatorname{span}\gamma_n^1 = 0$, $\operatorname{span}\mathbf{S}^n = 0$ pre párne n, $\operatorname{span}\mathbf{S}^1 = 1$, $\operatorname{span}\mathbf{S}^n \geq 1$ pre nepárne n, $\operatorname{span}(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) = 2$. Uveďme výsledok pre sféry, o ktorom sme hovorili v úvode.

Definícia 2.1.5. Zapíšme prirodzené číslo n v tvare $(2a+1)\cdot 2^{c+4d}$, pričom $a, c, d \in \mathbb{N}_0$, $c \leq 3$. Číslo $\varrho(n) = 2^c + 8d$ sa nazýva *Hurwitzovo-Radonovo číslo*.

Veta 2.1.6. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí* $\operatorname{span}\mathbf{S}^{n-1} = \varrho(n) - 1$.

Dôsledok 2.1.7. *Jediné paralelizovateľné sféry sú $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ a $\mathbf{S}^7$.*

Dôkaz. Sféra $\mathbf{S}^{n-1}$ je pre $n \geq 2$ paralelizovateľná len vtedy, keď $\operatorname{span}\mathbf{S}^{n-1} = n-1$, t. j. $\varrho(n) = n$, čo pre čísla a, c, d dáva $2^c + 8d = (2a+1)\cdot 2^{c+4d}$. Pre $d > 0$ je ľavá strana ostatnej rovnosti väčšia ako pravá. Jediná možnosť je teda $d = 0$, čo po dosadení dáva možnosti $n = 2, 4, 8$. $\square$

2.2 Rôzne prístupy k určeniu rozponu

Hopfova veta dáva kritérium, ktoré umožňuje zistiť (ak poznáme Eulerovu charakteristiku), či je rozpon danej variety M nulový, alebo či $\operatorname{span} M \geq 1$. Namiesto priameho výpočtu rozponu si položme inú otázku: Kedy bude $\operatorname{span} M \geq k$? Keby sme vedeli na túto otázku odpovedať pre každé k, vedeli by sme priamo vypočítať $\operatorname{span} M$. Vďaka rôznym metódam sa podarilo nájsť podmienky, vyjadrené pomocou invariantov, ktoré *v princípe* možno vyrátať, aspoň pre $k \leq 4$. Priblížme si niektoré také metódy.

Index k-poľa

Pre danú varietu M budeme k-ticu všade nezávislých rezov τ_M nazývať *k-pole*. Ak tieto rezy sú všade nezávislé až na konečný počet bodov z M, budeme k-ticu rezov nazývať *k-pole s konečným počtom singularít*. Za určitých okolností možno singularity k-poľa odstrániť a tak dokázať, že $\operatorname{span} M \geq k$.

Definícia 2.2.1. Nech M je orientovaná varieta dimenzie n a $(s_1, \ldots, s_k)$ jej k-pole s konečným počtom singularít. Túto k-ticu $(s_1, \ldots, s_k)$ možno brať ortonormálnu (vďaka tomu, že Grammova-Schmidtova ortogonalizácia je spojitý proces) všade tam, kde je lineárne nezávislá. Uvažujme takú trianguláciu M, že každý singulárny bod leží vnútri nejakého jej n-simplexu a žiadne dva singulárne body neležia v tom istom (existencia takej triangulácie je dokázaná). Zoberme singulárny bod p ležiaci v n-simplexe σ. Dotyková fibrácia τ_M zúžená na σ je triviálna, t. j. izomorfná so $\sigma \times \mathbb{R}^n$. Pre každý bod $x \in \sigma$ rôzny od p tak možno $(s_1(x), \ldots, s_k(x))$ považovať za usporiadanú k-ticu lineárne nezávislých vektorov v $\mathbb{R}^n$, teda za prvok Stiefelovej variety $V_{n,k}$ (poz. definíciu 3.3.1). Máme tak zobrazenie $\dot{\sigma} \to V_{n,k}$, pričom $\dot{\sigma} \cong \mathbf{S}^{n-1}$ je hranica simplexu σ. Homotopická trieda tohto zobrazenia je prvok homotopickej grupy $\pi_{n-1}(V_{n,k})$. Tejto triede hovoríme *index daného k-poľa v bode p*. Napokon *index k-poľa* $(s_1, \ldots, s_k)$ je prvok

$$\operatorname{Index}(s_1, \ldots, s_k) = \sum_p (\text{index v } p) \in \pi_{n-1}(V_{n,k})$$

(sčítame cez všetky singulárne body).

Hodnota indexu je nezávislá od zvolenej triangulácie. Význam indexu spočíva v tomto tvrdení:

Veta 2.2.2. *Nech M je n-rozmerná orientovaná varieta a $(s_1, \ldots, s_k)$ jej k-pole s konečným počtom singularít. Na M existuje k-pole bez singularít, ktoré je totožné s $(s_1, \ldots, s_k)$ na $(m-2)$-skelete M, práve vtedy, keď* $\operatorname{Index}(s_1, \ldots, s_k) = 0$.

Dôkaz a zdôvodnenie nezávislosti indexu možno nájsť v [46]. Pre $k = 2$ je index k-poľa nezávislý dokonca od samotného výberu k-poľa a jeho hodnotu možno vyjadriť pomocou algebraických invariantov variety (poz. [51]). Teda existencia 2-poľa s konečným počtom singularít na orientovateľnej variete M poskytne priamo odpoveď, či $\operatorname{span} M \geq 2$. Spojením podmienok pre takú existenciu (poz. [46]) a vyjadrenia indexu dostaneme nutné a postačujúce podmienky pre $\operatorname{span} M \geq 2$ zhrnuté v tabuľke 1 (n je dimenzia M). V uvedenej

n	kedy $\operatorname{span} M \geq 2$?
$n \equiv 1 \pmod 4$	$w_{n-1}(M) = 0$, $k(M) = 0$
$n \equiv 2 \pmod 4$	$\chi(M) = 0$
$n \equiv 3 \pmod 4$	vždy
$n \equiv 4 \pmod 4$, $n > 4$	$\chi(M) = 0$, $\sigma(M) \equiv 0 \pmod 4$

Tabuľka 1: *Nutné a postačujúce podmienky na* $\operatorname{span} M \geq 2$ *pre orientovateľnú varietu* M.

tabuľke je $k(M) = \sum_i \dim H_{2i}(M, \mathbb{R}) \bmod 2$ tzv. *reálna Kervaireova semicharakteristika* a $\sigma(M)$ je *signatúra* M (poz. napr. [33]).

Metóda singularít

Pre vektorové fibrácie ξ a η označme $\xi \hat{\otimes} \eta = \pi_1^* \xi \otimes \pi_2^* \eta$ (t. j. tenzorový súčin indukovaných fibrácií), pričom π_1, π_2 sú projekcie $B(\xi) \times B(\eta)$ na jednotlivé zložky. V práci Beckera [5] a Daxa [10] nájdeme výsledok, ktorý po aplikovaní na dotykovú fibráciu dáva nasledovné tvrdenie (ξ_{k-1} označuje Hopfovu jednorozmernú vektorovú fibráciu nad $\mathbb{R}\mathbf{P}^{k-1}$).

Veta 2.2.3. *Nech* M *je varieta dimenzie* n *a* $1 \leq k \leq n$.

$$\textit{Ak} \quad \operatorname{span} M \geq k, \quad \textit{tak} \quad \operatorname{span}(\tau_M \hat{\otimes} \xi_{k-1}) \geq 1.$$
$$\textit{Ak} \quad 2k < n \ \textit{ a } \ \operatorname{span}(\tau_M \hat{\otimes} \xi_{k-1}) \geq 1, \quad \textit{tak} \quad \operatorname{span} M \geq k.$$

Teda ak $k < (\dim M)/2$, tak $\operatorname{span} M \geq k$ práve vtedy, keď fibrácia $\tau_M \hat{\otimes} \xi_{k-1}$ má všade nenulový rez. Vo všeobecnosti je ťažké zistiť, či taký rez existuje. Pre $k \leq 4$ sa Koschorkemu [25] pomocou teórie singularít podarilo vyjadriť podmienky na takú existenciu pomocou invariantov variety, ktoré sú (v princípe) vypočítateľné. Spomedzi mnohých jeho tvrdení uveďme aspoň jedno.

Veta 2.2.4. *Nech* M *je varieta dimenzie* $n > 6$, $n \equiv 2 \pmod 4$. *Potom* $\operatorname{span} M \geq 3$ *práve vtedy, keď* $\chi(M) = 0$ *a* $w_{n-2}(M) = 0$.

2.3 Stabilný rozpon

Zatiaľ jediná trieda variet, pre ktorú sme uviedli úplnú odpoveď na otázku rozponu, je trieda sfér (veta 2.1.6). Tento výsledok možno zaujímavým spôsobom rozšíriť. Jedna z vlastností sfér je, že $\tau_{\mathbf{S}^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^{n+1}$ (to sme využili už v príklade 1.2.7). Variety s touto vlastnosťou, t. j. také variety M, že $\tau_M \oplus \varepsilon^1$ je triviálna fibrácia, sa nazývajú *stabilne paralelizovateľné variety*, alebo tiež *π-variety*. Čiastočne Kervaire [17] a neskôr Bredon s Kosinskim [8] dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.3.1. *Nech M je stabilne paralelizovateľná varieta a* $\dim M = n \geq 1$. *Potom M je buď paralelizovateľná, alebo* $\operatorname{span} M = \operatorname{span} \mathbf{S}^n$. *Presnejšie:*

(a) ak n je párne, M je paralelizovateľná práve vtedy, keď $\chi(M) = 0$;

(b) ak n je nepárne a $n \notin \{1, 3, 7\}$, M je paralelizovateľná práve vtedy, keď $\hat{\chi}_2(M) = 0$.

V časti (b) je $\hat{\chi}_2(M) = \sum_{2i<n} \dim H_i(M, \mathbb{Z}_2) \bmod 2$ tzv. $\mathbb{Z}_2$-Kervaireova semicharakteristika.

Pre stabilne paralelizovateľné variety M z triviálnosti fibrácie $\tau_M \oplus \varepsilon^1$ vyplýva samozrejme aj triviálnosť fibrácie $\tau_M \oplus \varepsilon^k$ pre všetky $k \geq 1$. V skutočnosti je číslo $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k$ (pre $k \geq 1$) konštanta pre každú varietu, nielen pre stabilne paralelizovateľnú.

Definícia 2.3.2. *Stabilný rozpon* variety M je číslo $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^1) - 1$ (ktoré sa rovná číslu $\operatorname{span}(\tau_M \oplus \varepsilon^k) - k$ pre ľubovoľné $k \geq 1$). Označujeme ho $\operatorname{span}^0 M$.

Zrejme pre každú varietu M platí $\dim M \geq \operatorname{span}^0 M \geq \operatorname{span} M$. Nie vždy nám hodnota stabilného rozponu dá informáciu o rozpone (napríklad pre párne n máme $\operatorname{span}^0 \mathbf{S}^n = n$, zatiaľ čo $\operatorname{span} \mathbf{S}^n = 0$), v istých prípadoch sa však tieto hodnoty môžu dokonca rovnať, ako hovorí nasledovné tvrdenie (poz. [25]).

Veta 2.3.3. *Nech M je varieta dimenzie n.*

(a) Ak n je párne a $\chi(M) = 0$, tak $\operatorname{span}^0 M = \operatorname{span} M$ *(pre $\chi(M) \neq 0$ je* $\operatorname{span} M = 0$*);*

(b) ak $n \equiv 1 \pmod 4$, $w_1(M)^2 = 0$ a $R_L(M) = 0$, tak $\operatorname{span}^0 M = \operatorname{span} M$ *(pre $R_L(M) \neq$ $\neq 0$ je za daných podmienok* $\operatorname{span} M = 1$*);*

(c) ak $n \equiv 3 \pmod 8$, $w_1(M) = w_2(M) = 0$ a $\hat{\chi}_2(M) = 0$, tak $\operatorname{span}^0 M = \operatorname{span} M$ *(pre $\hat{\chi}_2(M) \neq 0$ je za daných podmienok* $\operatorname{span} M = 3$*).*

V časti (b) je $R_L(M)$ tzv. *skrútená Kervaireova semicharakteristika*, poz. [4].

Teda jedna z možností, ako sa dá určiť (prípadne odhadnúť) rozpon variety, je skúsiť nájsť jej stabilný rozpon a následne zistiť jeho vzťah k rozponu (napríklad pomocou predošlého tvrdenia).

Kapitola 3

Rozpon niektorých variet

V predošlej kapitole sme uviedli viaceré všeobecné výsledky umožňujúce niekedy vypočítať rozpon variety, a to najmä v prípadoch, keď je rozpon „malý“, prípadne keď varieta je stabilne paralelizovateľná. Zamerajme sa teraz na niektoré konkrétne triedy variet.

3.1 Vlajkové a orientované vlajkové variety

Definícia 3.1.1. Majme prirodzené čísla s, n a $n_1, \ldots, n_k$ spĺňajúce $s \geq 2$, $1 \leq n_1 \leq$ $\leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ (usporiadanie je zavedené iba kvôli jednoznačnosti zápisu a v niektorých situáciách ho nebudeme dodržiavať) a $n_1 + \cdots + n_k = n$. Postupnosť $(S_1, \ldots, S_k)$ navzájom kolmých vektorových podpriestorov euklidovského priestoru $\mathbb{R}^n$, pričom $\dim S_i = n_i$, sa nazýva *vlajka typu* $(n_1, \ldots, n_k)$. Ak navyše $S_1, \ldots, S_k$ sú orientované a ich orientácie indukujú štandardnú orientáciu na $S_1 \oplus \cdots \oplus S_k = \mathbb{R}^n$, nazýva sa táto postupnosť *orientovaná vlajka typu* $(n_1, \ldots, n_k)$.

Definícia 3.1.2. Priestor všetkých vlajok typu $(n_1, \ldots, n_k)$ (ozn. $G(n_1, \ldots, n_k)$) môžeme stotožniť s homogénnym priestorom

$$\mathbf{O}(n)/(\mathbf{O}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{O}(n_k))$$

(pričom priestor $\mathbf{O}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{O}(n_k)$ je v $\mathbf{O}(n)$ vložený štandardným spôsobom). Podobne priestor všetkých orientovaných vlajok typu $(n_1, \ldots, n_k)$ (ozn. $\tilde{G}(n_1, \ldots, n_k)$) môžeme stotožniť s

$$\mathbf{SO}(n)/(\mathbf{SO}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{SO}(n_k)).$$

Priestor $G(n_1, \ldots, n_k)$, resp. $\tilde{G}(n_1, \ldots, n_k)$, tak možno považovať za uzavretú hladkú súvislú varietu, ktorú nazývame *vlajková*, resp. *orientovaná vlajková varieta typu* $(n_1, \ldots, n_k)$.

Dimenzia oboch variet z predošlej definície sa rovná

$$\dim \mathbf{O}(n) - \sum_{i=1}^{k} \dim \mathbf{O}(n_i) = \binom{n_1+\cdots+n_k}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2} = \sum_{1\le i<j\le k} n_i n_j.$$

Ľahko možno nahliadnuť, že $\tilde{G}(n_1, \ldots, n_k)$ je nakrývajúci priestor priestoru $G(n_1, \ldots, n_k)$ (s počtom listov 2^{k-1}). Preto vždy

$$\operatorname{span} \tilde{G}(n_1, \ldots, n_k) \ge \operatorname{span} G(n_1, \ldots, n_k). \tag{3.1.3}$$

Uveďme dve tvrdenia, ktoré pre $k \ge 3$ uvádzajú, ktoré vlajkové a orientované vlajkové variety sú paralelizovateľné, resp. stabilne paralelizovateľné. Prvé tvrdenie dokázali Korbaš [19] a (neskôr, iným spôsobom) Sankaran, Zvengrowski [40], druhé I. Miatello, R. Miatello [31] a Sankaran, Zvengrowski [41].

Veta 3.1.4. *Medzi vlajkovými varietami $G(n_1, \ldots, n_k)$ je pre $k \ge 3$ jedinou paralelizovateľnou varietou $G(1, \ldots, 1)$. Súčasne je jedinou stabilne paralelizovateľnou.*

Veta 3.1.5. *Medzi orientovanými vlajkovými varietami $\tilde{G}(n_1, \ldots, n_k)$ sú pre $k \ge 3$ paralelizovateľné iba variety*

$$\tilde{G}(1, \ldots, 1, n_k), \quad \tilde{G}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m+2}, 2, \ldots, 2) \quad \text{a} \quad \tilde{G}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 3, \ldots, 3),$$

pričom $m \ge 0$. Okrem nich sú stabilne paralelizovateľné už iba variety $\tilde{G}(1, 2, \ldots, 2)$ a $\tilde{G}(2, \ldots, 2)$.

Ďalšie výsledky dávajúce čiastočnú, prípadne úplnú informáciu o rozpone a stabilnom rozpone niektorých vlajkových a orientovaných vlajkových variet možno nájsť napríklad v [23]. Zamerajme sa teraz na špeciálny prípad $k = 2$, o ktorom predošlé tvrdenia nehovorili.

3.2 Grassmannove variety

Definícia 3.2.1. Množina všetkých k-rozmerných vektorových podpriestorov v $\mathbb{R}^n$ sa nazýva *Grassmannova varieta*, označuje sa $G_{n,k}$. Množina všetkých orientovaných k-rozmerných vektorových podpriestorov v $\mathbb{R}^n$ sa nazýva *orientovaná Grassmannova varieta*, označuje sa $\tilde{G}_{n,k}$.

Varietu $G_{n,k}$ možno stotožniť s priestorom $\mathbf{O}(n)/(\mathbf{O}(k)\times\mathbf{O}(n-k))$, takže $G_{n,k}$ je vlastne vlajkovou varietou $G(k, n-k)$. Podobne $\tilde{G}_{n,k} = \mathbf{SO}(n)/(\mathbf{SO}(k)\times\mathbf{SO}(n-k)) = \tilde{G}(k, n-k)$. Špeciálnym prípadom Grassmannových variet sú reálne projektívne priestory a sféry. Presnejšie, $G_{n,1} = G_{n,n-1} = \mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1}$ a $\tilde{G}_{n,1} = \tilde{G}_{n,n-1} = \mathbf{S}^{n-1}$.

Zhrnutím výsledkov viacerých autorov (poz. napr. [24]) dostaneme dve tvrdenia.

Veta 3.2.2. *Medzi varietami $G_{n,k}$ sú paralelizovateľné jedine $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$, $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ a $\mathbb{R}\mathbf{P}^7$. Žiadne iné nie sú ani stabilne paralelizovateľné.*

Veta 3.2.3. *Medzi varietami $\tilde{G}_{n,k}$ sú paralelizovateľné jedine $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{S}^7$ a $\tilde{G}_{6,3}$. Okrem týchto je stabilne paralelizovateľná iba $\tilde{G}_{4,2}$.*

Z Eulerovej charakteristiky možno ľahko určiť, ktoré Grassmannove variety majú nenulový rozpon. Keďže

$$\chi(G_{n,k}) = \begin{cases} 0, & \text{keď } n \text{ je párne a } k \text{ je nepárne,} \\ \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} & \text{inak} \end{cases}$$

a $\chi(\tilde{G}_{n,k}) = 2\chi(G_{n,k})$, majú kladný rozpon práve tie $G_{n,k}$ a $\tilde{G}_{n,k}$, pre ktoré n je párne a k je nepárne. V takej situácii platí pre rozpon nasledujúci dolný odhad (Leite, Miatello [28]).

Veta 3.2.4. *Ak n je párne a k nepárne, tak* $\operatorname{span} G_{n,k} \geq \varrho(n) - 1$.

Samozrejme, v takom prípade z (3.1.3) aj $\operatorname{span} \tilde{G}_{n,k} \geq \varrho(n) - 1$.

Tvrdenie, pomocou ktorého možno ohraničiť zdola a zhora rozpon a stabilný rozpon $G_{n,k}$ či $\tilde{G}_{n,k}$ rôznym spôsobom v závislosti od zvyškov čísel k a $n-k$ po delení štyrmi možno nájsť v [23]. Pre niektoré hodnoty (n, k) tak dostaneme priamo hodnotu rozponu, pre iné len veľmi voľný odhad. Iná možnosť, ako rozpon Grassmannovej variety ohraničiť zhora, je vypočítať jej Stiefelove-Whitneyho triedy. Keďže existencia ℓ všade nezávislých polí na variete M dimenzie m implikuje $w_m(M) = w_{m-1}(M) = \cdots = w_{m-\ell+1}(M) = 0$, ak ukážeme, že pre r je $w_r(M)$ nenulové, tak nutne $\operatorname{span} M \leq m - r$. Postup na výpočet $w_i(G_{n,k})$ možno nájsť v [20].

3.3 Projektívne Stiefelove variety

Iným špeciálnym prípadom orientovaných vlajkových variet sú Stiefelove variety.

Definícia 3.3.1. Postupnosť $(v_1, \ldots, v_r)$ navzájom kolmých jednotkových vektorov v $\mathbb{R}^n$ sa nazýva *ortonormálny r-repér*. Pre $1 \le r \le n-1$ sa množina všetkých ortonormálnych r-repérov v $\mathbb{R}^n$ nazýva *Stiefelova varieta $V_{n,r}$*.

Keďže ku každému ortonormálnemu r-repéru $(v_1, \ldots, v_r)$ možno jediným spôsobom priradiť taký $(n-r)$-rozmerný orientovaný podpriestor $S \subset \mathbb{R}^n$, že $([v_1], \ldots, [v_r], S)$ je orientovaná vlajka ($[v_i]$ je jednorozmerný orientovaný podpriestor $\mathbb{R}^n$ s bázou (v_i)), máme

$$V_{n,r} = \tilde{G}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, n-r) \qquad \text{a} \qquad \dim V_{n,r} = nr - \binom{r+1}{2}.$$

Pre $r = 1$ dostávame $V_{n,1} = \mathbf{S}^{n-1}$.

Otázka rozponu Stiefelových variet je vyriešená. Pre $r \ge 2$ je $V_{n,r}$ paralelizovateľná (to ukázal Sutherland [49] a vyplýva to aj z vety 3.1.5) a rozpon sfér už tiež poznáme (poz. vetu 2.1.6).

Definícia 3.3.2. Keď v Stiefelovej variete $V_{n,r}$ stotožníme každý ortonormálny r-repér $(v_1, \ldots, v_r)$ s r-repérom $(-v_1, \ldots, -v_r)$, dostaneme varietu $X_{n,r}$, ktorú nazývame *projektívna Stiefelova varieta*.

Projektívnu Stiefelovu varietu možno zapísať ako homogénny priestor v tvare

$$X_{n,r} = \mathbf{O}(n)/(\mathbf{O}(n-r) \times \mathbb{Z}_2).$$

Všimnime si, že táto varieta je zovšeobecnením reálneho projektívneho priestoru. Pre $r = 1$ totiž $X_{n,1} = \mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1}$. Jedna z vlastností variet $X_{n,r}$ je, že okrem tých z nich, ktoré sú paralelizovateľné, nie sú žiadne z nich stabilne paralelizovateľné. O ich rozpone teda poskytuje netriviálnu informáciu ich stabilný rozpon. Uveďme nasledujúce tvrdenie z [3].

Veta 3.3.3. *Projektívne Stiefelove variety $X_{n,n-1}$, $X_{2m,2m-2}$, $X_{16,8}$, $X_{8,r}$ a $X_{4,s}$ sú pre všetky prípustné hodnoty n, m, r, s paralelizovateľné. Všetky ostatné okrem $X_{12,8}$ nie sú paralelizovateľné ani stabilne paralelizovateľné.*

Poznámka 3.3.4. Pre varietu $X_{12,8}$ otázka paralelizovateľnosti nie je rozhodnutá.

Pre stabilný rozpon $X_{n,r}$ možno odvodiť isté horné aj dolné ohraničenia s využitím toho, že stabilnú dotykovú fibráciu variety $X_{n,r}$ možno vyjadriť v tvare

$$\tau_{X_{n,r}} \oplus \binom{r+1}{2}\varepsilon^1 = nr\xi_{n,r}$$

(poz. [27]). V uvedenom vzťahu $\xi_{n,r}$ je jednorozmerná vektorová fibrácia prislúchajúca nakrytiu $V_{n,r}$ nad $X_{n,r}$ a zápis $k\eta$ predstavuje k-násobný Whitneyho súčet $\eta \oplus \cdots \oplus \eta$. Následne dostaneme odhad ([23], [24])

$$\operatorname{span}^0 X_{n,r} = \operatorname{span}(nr\xi_{n,r}) - \binom{r+1}{2} \geq \operatorname{span}(nr\xi_{n,1}) - \binom{r+1}{2}. \tag{3.3.5}$$

Rozponom fibrácie $k\xi_{n,1}$ sa zaoberali viacerí autori, ďalšie informácie a aj iné odhady rozponu a stabilného rozponu sú v [23] a [24].

Aby sme mohli dolné ohraničenie stabilného rozponu $X_{n,r}$ využiť pri odhade rozponu, potrebujeme, aby boli tieto dve hodnoty rovnaké. Pre mnohé projektívne Stiefelove variety nám to zaručuje ďalšie tvrdenie z [23], [24], ktoré dostaneme využitím výsledkov z [25] a [16].

Veta 3.3.6. *Ak dvojica (n, r) spĺňa niektorú z podmienok*

(a) *n je párne a* $r \equiv 0, 2, 3, 4, 7 \pmod 8$*;*

(b) *n je nepárne a* $r \equiv 0, 1, 4, 5, 6 \pmod 8$*;*

(c) *(n, r) je jedného z tvarov* $(4m, 8q+5)$, $(4m, 16q+6)$, $(8m, 16q+9)$, $(4m+2, 8q+1)$, $(8m+7, 16q+7)$*;*

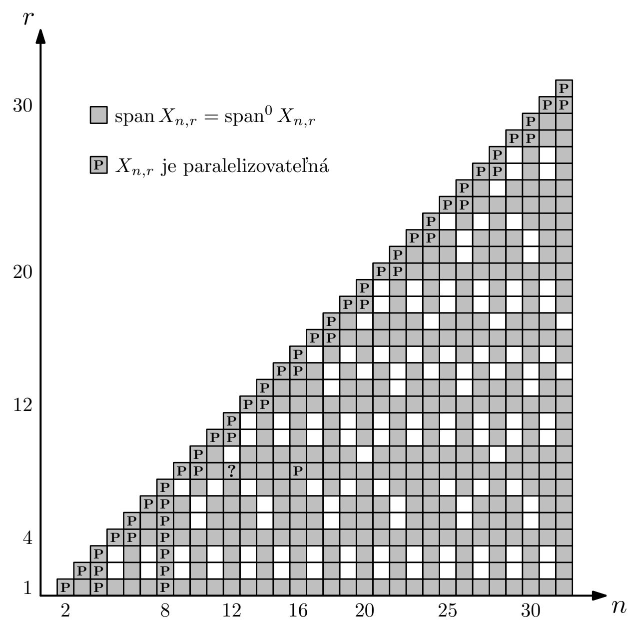
(d) $r = 1$,

tak $\operatorname{span} X_{n,r} = \operatorname{span}^0 X_{n,r}$.

Na obr. 3 je znázornené, ktoré $X_{n,r}$ sú v predošlej vete zahrnuté. Nie je známe, či existuje projektívna Stiefelova varieta, ktorej stabilný rozpon sa nerovná rozponu. Ak $r \neq$ $\neq 2$ alebo $r = 2$ a n je párne, možno nerovnosť (3.3.5) použiť napriek tomu, že nevieme, či $\operatorname{span} X_{n,r} = \operatorname{span}^0 X_{n,r}$. Presnejšie, platí:

Veta 3.3.7. *Ak (n, r) nie je tvaru $(2m+1, 2)$, tak* $\operatorname{span} X_{n,r} \geq \operatorname{span}(nr\xi_{n,1}) - \binom{r+1}{2}$.

(Pre $X_{2m+1,2}$ nevieme, či tvrdenie platí.) Dôkaz možno nájsť v [24]. V uvedenej práci je tiež presné vyjadrenie rozponu $X_{n,n-s}$ pre $s = 1, 2, 3$ (pre $s = 1$ a pre $s = 2$ a párne n je táto



Obr. 3: *Prehľad projektívnych Stiefelových variet $X_{n,r}$ pre $n \leq 32$, ktoré majú podľa viet 3.3.3 a 3.3.6 rozpon zhodný so stabilným rozponom.*

varieta paralelizovateľná, poz. vetu 3.3.3). Týmito vzťahmi ukončíme časť o projektívnych Stiefelových varietách.

Veta 3.3.8. *Pre nepárne $m \geq 3$ a ľubovoľné $n \geq 4$ platí*

$$\operatorname{span} X_{m,m-2} = \dim X_{m,m-2} - 2^a, \qquad \text{pričom } m = 2^a \cdot (2q+1) + 1,$$

$$\operatorname{span} X_{n,n-3} = \begin{cases} \dim X_{n,n-3} - 2, & \text{keď } n \equiv 0, 3 \pmod 4, \\ \dim X_{n,n-3} + 2 - 2^a, & \text{keď } n = 2^a \cdot (2q+1) + b,\ b \in \{1,2\},\ a \geq 2. \end{cases}$$

3.4 Doldove variety

Podobne ako reálny projektívny priestor $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, možno definovať *komplexný projektívny priestor* $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Stačí namiesto jednotkovej sféry v $\mathbb{R}^{n+1}$ zobrať jednotkovú sféru v $\mathbb{C}^{n+1}$ a tú faktorizovať podľa relácie generovanej dvojicami $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \sim (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1})$ pre všetky komplexné jednotky λ. Keďže $\chi(\mathbb{C}\mathbf{P}^n) = n+1$, má $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ nulový rozpon. Zaoberať sa budeme triedou variet, ktoré sa pomocou $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ dajú skonštruovať. Názov pochádza z mena A. Dolda, ktorý sa týmito varietami v [11] zaoberal. (Motiváciou pre ich zavedenie bolo nájsť generátory neorientovaných grúp kobordizmu s nepárnou dimenziou.)

Definícia 3.4.1. Varieta

$$P(m,n) = (\mathbf{S}^m \times \mathbb{C}\mathbf{P}^n)/\sim, \qquad \text{pričom } (x,z) \sim (-x,\bar{z}),$$

sa nazýva *Doldova varieta.*

Keďže varieta $P(m,n)$ má dvojité nakrytie $\mathbf{S}^m \times \mathbb{C}\mathbf{P}^n$, jej dimenzia je $m+2n$ a pre jej Eulerovu charakteristiku máme

$$\chi(P(m,n)) = \tfrac{1}{2}\chi(\mathbf{S}^m \times \mathbb{C}\mathbf{P}^n) = \tfrac{1}{2}\chi(\mathbf{S}^m)\chi(\mathbb{C}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } m \text{ je párne,} \\ 0, & \text{ak } m \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Pre párne m preto $\operatorname{span} P(m,n) = 0$, zatiaľ čo pre nepárne $\operatorname{span} P(m,n) \geq 1$. Ďalšiu informáciu o rozpone možno získať zo Stiefelových-Whitneyho tried opísaných v [11]. Kohomologický okruh s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$ má má tvar

$$H^*(P(m,n),\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[c,d]/(c^{m+1} = d^{n+1} = 0),$$

pričom $c \in H^1(P(m,n),\mathbb{Z}_2)$ a $d \in H^2(P(m,n),\mathbb{Z}_2)$. Totálna Stiefelova-Whitneyho trieda je daná predpisom

$$w(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}. \tag{3.4.2}$$

Príklad 3.4.3. Totálna Stiefelova-Whitneyho trieda Doldovej variety $P(3,2)$ má tvar

$$w(P(3,2)) = (1+c)^3(1+c+d)^3 = 1 + (c^2+d) + cd + d^2,$$

Teda $w_0 = 1$, $w_2 = c^2+d$, $w_3 = cd$, $w_4 = d^2$ a ostatné triedy sú nulové. Keďže $\dim P(3,2) = = 7$ a $w_4 \neq 0$, nutne $\operatorname{span} P(3,2) \leq 3$. Na druhej strane, $w_1 = 0$, teda $P(3,2)$ je orientovateľná a podľa tabuľky 1 máme $\operatorname{span} P(3,2) \geq 2$. Rozpon tejto variety je preto 2 alebo 3. (V práci [4] je ukázané, že každá varieta dimenzie $4k+3$ pre $k \geq 1$ má rozpon aspoň 3, takže $\operatorname{span} P(3,2) = 3$).

Pomocou Stiefelových-Whitneyho tried možno skúmať nielen rozpon dotykovej fibrácie, ale rozpon ľubovoľnej vektorovej fibrácie nad konkrétnou Doldovou varietou. Stong [48] totiž ukázal, že totálna Stiefelova-Whitneyho trieda každej takej vektorovej fibrácie môže mať len určitý tvar.

3.5 Homogénne priestory

Väčšina variet, ktorými sme sa doteraz zaoberali, sa dá zapísať v tvare G/H, pričom G je buď ortogonálna grupa $\mathbf{O}(n)$, alebo špeciálna ortogonálna grupa $\mathbf{SO}(n)$. Vo všeobecnosti, ak G je Lieova grupa a H je nejaká jej uzavretá Lieova podgrupa, tak varieta G/H je *homogénny priestor*. (Topologický priestor X nazýva homogénny priestor topologickej grupy G, ak G má na X tranzitívnu akciu.)

Paralelizovateľnými homogénnymi priestormi sú napríklad všetky Lieove grupy a Stiefelove variety (okrem väčšiny sfér). Naopak, Grassmannove variety takmer všetky paralelizovateľné nie sú. V prácach Singhofa [42], resp. Singhofa a Wemmera [43], [44] možno nájsť kritérium pre paralelizovateľnosť (resp. stabilnú paralelizovateľnosť) homogénnych priestorov G/H pre prípad, keď G je jednoduchá jednoducho súvislá kompaktná Lieova grupa a H je jej uzavretá súvislá podgrupa.

G	názov grupy	jednoduchá súvislosť	jednoduchosť	dimenzia
$\mathbf{O}(n)$	ortogonálna	nie	áno	$\binom{n}{2}$
$\mathbf{SO}(n)$	špeciálna ortogonálna	nie	áno	$\binom{n}{2}$
$\mathrm{Spin}(n)$	dvojité nakrytie $\mathbf{SO}(n)$	áno, pre $n > 2$	áno	$\binom{n}{2}$
$\mathbf{Sp}(n)$	kompaktná symplektická	áno	áno	$n(2n+1)$
$\mathbf{U}(n)$	unitárna	nie	nie	n^2
$\mathbf{SU}(n)$	špeciálna unitárna	áno	áno	$n^2 - 1$

Tabuľka 2: *Niektoré kompaktné reálne Lieove grupy.*

V tabuľke 2 je zoznam najbežnejších kompaktných (reálnych) Lieových grúp. Kritérium Singhofa a Wemmera teda môžeme aplikovať na homogénne priestory, ktoré sú faktorovými priestormi grúp $\mathrm{Spin}(n)$ (pre $n > 2$), $\mathbf{Sp}(n)$ a $\mathbf{SU}(n)$.

Časť II

Projekt dizertačnej práce

Kapitola 4

Projekt dizertačnej práce

4.1 Formulácia problému

V písomnej práci k dizertačnej skúške sme uviedli krátky historický pohľad na problém vektorových polí a zhrnuli sme základné vlastnosti vektorových fibrácií a ich rezov. Problém vektorových polí je sformulovaný nasledovne:

Pre danú varietu M nájdite maximálny možný počet všade lineárne nezávislých vektorových polí na M.

Inými slovami, vyriešiť tento problém pre danú varietu znamená určiť jej rozpon. Problém vektorových polí pritom súvisí s ďalšími oblasťami topológie. O jednej takej súvislosti hovorí nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1.1. [22] *Ak sa dotyková fibrácia τ_M variety M (hladkej uzavretej a súvislej, ako v celej práci) dá zapísať v tvare $\tau_M \cong \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k$ (pričom α_i sú vektorové fibrácie s nenulovou dimenziou) a $\operatorname{cat} M \leq k$, tak $\operatorname{span} M \geq \min\{\dim \alpha_i;\ i = 1, \ldots, k\}$.*

Rozklad τ_M na Whitneyho súčet popísaných vektorových fibrácií sa nazýva *k-štiepenie* (štiepeniami vektorových fibrácií sa zaoberajú napríklad autori v prácach [12], [47]). Výraz $\operatorname{cat} M$ označuje *Ľusternikovu-Šnireľmanovu kategóriu* priestoru M, t. j. najmenšie t také, že M sa dá pokryť t otvorenými podmnožinami, ktoré sú v M kontraktibilné. Ďalšie tvrdenie ukazuje súvislosť tejto kategórie, stabilného rozponu a *kodimenzie vnorenia* variety (t. j. takého čísla k, že M sa dá vnoriť do $\mathbb{R}^{n+k}$, nie však do $\mathbb{R}^{n+k-1}$, pričom n je dimenzia M).

Veta 4.1.2. [22] *Nech M je n-rozmerná varieta s kodimenziou vnorenia k. Ak M nie je* *stabilne paralelizovateľná, tak*

$$k \le (n - \operatorname{span}^0 M)(\operatorname{cat} M - 1) \qquad \text{a} \qquad n - \operatorname{span}^0 M \le k(\operatorname{cat} M - 1).$$

Nech $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ je hladké zobrazenie, pričom nech $n \ge p$. Potom M musí mať singulárne body (pripomeňme, že M je uzavretá varieta), teda existujú $x \in M$ také, že df_x má rang menší ako p. Bod $q \in M$ je singulárny bod *typu „záhyb“*, ak f má vyjadrenie tvaru $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2, \ldots, \pm x_n^2)$ vzhľadom na vhodný lokálny súradnicový systém okolo q. Hladké zobrazenie $f : M^n \to \mathbb{R}^p$, kde $n \ge p$, sa nazýva *záhybové zobrazenie*, ak všetky jeho singulárne body sú typu „záhyb“. Rozpon a stabilný rozpon súvisia aj so záhybovými zobrazeniami. Presnejšie, ak $\operatorname{span} M \ge p - 1$ a $\dim M \ge p \ge 2$, tak existuje záhybové zobrazenie $M \to \mathbb{R}^p$. Naopak, ak $\dim M$ a p majú rovnakú paritu a existuje záhybové zobrazenie $M \to \mathbb{R}^p$, tak $\operatorname{span}^0 M \ge p - 1$. (Uvedené poznatky pochádzajú z [2], [38], [39].)

Problém vektorových polí teda nie je izolovaný a jeho (hoci len čiastočné) vyriešenie pre danú varietu dáva dôsledky pre iné oblasti výskumu. V práci sme uviedli viacero konkrétnych problémov, ktorým sa možno venovať v rámci dizertačnej práce, a to najmä v kapitole 3. Priblížme si ich ešte raz stručne v nasledujúcom zozname (niektoré všeobecnejšie, niektoré konkrétnejšie):

- Určiť (prípadne ohraničiť) rozpon niektorých tried vlajkových či orientovaných vlajkových variet.
- Určiť (prípadne ohraničiť) rozpon (prípadne stabilný rozpon) niektorých tried Grassmannových a orientovaných Grassmannových variet.
- Zistiť, či stabilný rozpon projektívnych Stiefelových variet sa rovná ich rozponu. Určiť rozpon niektorých tried projektívnych Stiefelových variet.
- Určiť rozpon Doldových variet.
- Zistiť, či niektoré konkrétne homogénne priestory sú paralelizovateľné a na základe toho skúsiť odvodiť niektoré ich vlastnosti.

V dizertačnej práci sa možno venovať aj iným varietám, prípadne ďalším problémom, ktoré sa týkajú vektorových fibrácií.

4.2 Prehľad súčasného stavu problematiky a literatúra k nej

V druhej kapitole sme sa okrem iného venovali tejto otázke: Ktoré variety majú pre dané $k \geq 1$ rozpon aspoň k? Odpovedať na ňu znamená charakterizovať napríklad pomocou (v princípe vypočítateľných) algebraických invariantov také variety M, že $\operatorname{span} M \geq k$. Náročnosť otázky rastie spolu s hodnotou k. V súčasnosti je táto otázka vyriešená pre $k \leq 4$. Literatúrou k tejto problematike sú práce Thomasa [51] a Koschorkeho [25]. Pre vyššie hodnoty k nie sú známe takmer žiadne výsledky. Z [25] je tiež tvrdenie dávajúce vzťah medzi rozponom a stabilným rozponom (poz. vetu 2.3.3).

O rozpone vlajkových a orientovaných vlajkových variet nie je známe príliš veľa. Okrem tvrdení o ich paralelizovateľnosti a stabilnej paralelizovateľnosti (vety 3.1.4 a 3.1.5) sú známe nerovnosti ([23])

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}^0 G(n_1,\ldots,n_k) &\leq n-1+\operatorname{span}^0 G(n_1,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_k),\\
\operatorname{span}^0 G(n_1,\ldots,n_k) &\leq (k-1)(n-k)+\tbinom{k}{2}+\operatorname{span}^0 G(n_1-1,\ldots,n_k-1),
\end{aligned}$$

(pričom $n=\sum n_i$) a rovnaké nerovnosti pre orientované vlajkové variety. Ďalšie nerovnosti medzi rozponmi týchto variet dostaneme z hladkej fibrácie

$$\begin{tikzcd}
G(n_2,\ldots,n_k) \arrow[r] & G(n_1,\ldots,n_k) \arrow[d, "p"] \\
& G(n_1, n_2+\cdots+n_k)
\end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

s projekciou $p(S_1,\ldots,S_k)=(S_1,S_2\oplus\cdots\oplus S_k)$ (aj tu môžeme vlajkové variety nahradiť orientovanými vlajkovými). Táto fibrácia nie je vektorovou fibráciou (o ktorej sme v doterajšom texte hovorili), ale zapadá do všeobecnejšieho pojmu fibrácie, ktorý dostaneme, keď zmiernime požiadavky na fíber (nemusí to byť vektorový priestor). Zdrojom pre poznatky o rozpone $G(n_2,\ldots,n_k)$ a $\widetilde{G}(n_2,\ldots,n_k)$ sú [19], [40], [41], [31], [46] a [23].

Známe výsledky hovoriace o rozpone Grassmannových variet a projektívnych Stiefelových variet sú tie, o ktorých sme hovorili v tretej kapitole (vety 3.2.2 až 3.3.8 a ďalšie tvrdenia z [23] a [24]). Čerpať ich možno z článkov [3], [20], [23], [24], [27], [28] a [31].

O Doldových varietách je známe, že pre žiadne $m,n \geq 1$ nie je $P(m,n)$ paralelizovateľná a stabilne paralelizovateľné sú iba $P(2,1)$ a $P(6,1)$. (Pre $n=0$ máme $P(m,0)=\mathbb{R}\mathbf{P}^m$, teda $P(1,0)$, $P(3,0)$ a $P(7,0)$ sú paralelizovateľné.) Odvodené je ešte isté horné ohraničenie rozponu variet typu $P(m,n)\times P(u,v)$. Informácie o Doldových varietách a ich vlastnostiach súvisiacich s rozponom možno čerpať z [11], [26], [35], [45] a [48].

Homogénnymi priestormi a ich paralelizovateľnosťou sa zaoberajú Singhof a Wemmer v [42], [43] a [44]. Užitočné informácie o Lieových grupách a homogénnych priestoroch sú v knihe [34], ktorej autormi sú Mimura a Toda.

4.3 Očakávané výsledky a predpokladané metódy riešenia

Pre niektoré triedy vlajkových či orientovaných vlajkových variet možno skúsiť odvodiť odhady pre ich rozpon z hladkej fibrácie (4.2.1). Napríklad pre $k=3$ sú v danej situácii fíber aj bázový priestor Grassmannove variety, o rozpone ktorých je známych viac výsledkov.

Ako sme už spomenuli, pri Grassmannových varietách dáva často dobré horné ohraničenie výpočet Stiefelových-Whitneyho tried. Takto (spolu s využitím už známych nerovností) sa možno pokúsiť získať odhady pre rozpon nejakej triedy týchto variet.

Pri projektívnych Stiefelových varietách jednou z hypotéz je, že $\operatorname{span} X_{n,r} = \operatorname{span}^0 X_{n,r}$ nielen pre tie dvojice (n,r), ktoré sú uvedené vo vete 3.3.6, ale pre všetky prípustné dvojice. Ďalšou možnosťou je skúsiť nájsť rozpon $X_{n,n-s}$ pre iné hodnoty s, ako vo vete 3.3.8.

Doldove variety majú Stiefelove-Whitneyho triedy dané predpisom (3.4.2), na základe čoho vieme ohraničiť ich rozpon zhora. Na druhej strane, dvojitým nakrytím $P(m,n)$ je $\mathbf{S}^m \times \mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Na základe toho možno odhadovať, že $\operatorname{span} P(m,n) \geq \operatorname{span} \mathbf{S}^m$. Okrem tejto hypotézy možno skúmať, či dokonca neplatí $\operatorname{span} P(m,n) = \operatorname{span} \mathbf{S}^m$, resp. hľadať také dvojice (m,n), že $\operatorname{span} P(m,n) \neq \operatorname{span} \mathbf{S}^m$.

Trieda homogénnych priestorov je veľmi široká – patria do nej napr. vlajkové, orientované vlajkové aj projektívne Stiefelove variety. Možno očakávať, že aj pre ďalšie priestory tohto typu sa podarí nájsť čiastočné informácie o rozpone. Príkladmi takých priestorov sú $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)$ a $\mathbf{SU}(2n)/\mathbf{Sp}(n)$. Tieto a ďalšie budú objektom nášho záujmu v ďalšej práci.

Literatúra

[1] Adams, J. F., *Vector fields on spheres*, Ann. of Math., **75** (1962), 603–632.

[2] Ando, Y., *Existence theorems of fold-maps*, Jap. J. Math., New Ser., **30** (2004), 29–73.

[3] Antoniano, E., Gitler, S., Ucci, J., Zvengrowski, P., *On the K-theory and parallelizability of projective Stiefel manifolds*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **31** (1986), 29–46.

[4] Atiyah, M. F., Dupont, J. L., *Vector fields with finite singularities*, Acta Math., **128** (1972), 1–40.

[5] Becker, J., *Vector fields on quotient manifolds of spheres*, Indiana Univ. Math. J., **22** (1973), 859–871.

[6] Borel, A., *La cohomologie mod 2 de certainsespaces homogènes*, Comment. Math. Helv., **27** (1953), 165–197.

[7] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] Bredon, G. E., Kosinski, A., *Vector fields on π-manifolds*, Ann. of Math., **84** (1966), 85–90.

[9] Brouwer, L. E. J., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **71** (1911), 97–115.

[10] Dax, J.-P., *Classes de Stiefel-Whitney en cobordisme normal*, C. R. Acad. Sc. Paris, **279** (1974), 545–548.

[11] Dold, A., *Erzeugende der Thomschen Algebra* $\mathfrak{N}$, Math. Zeitschr., **65** (1956), 25–35.

[12] Glover, H. H., Homer, W. D., Stong, R., *Splitting the tangent bundle of projective space*, Indiana Univ. Math. J., **31** (1982), 161–166.

[13] Hadamard, J., *Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable II, 2. vydanie, Paríž, 1910.

[14] Hopf, H., *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **96** (1927), 225–250.

[15] Hurwitz, A., *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann., **88** (1923), 1–25.

[16] James, I., Thomas, E., *An approach to the enumeration problem for non-stable vector bundles*, J. Math. Mech., **14** (1965), 485–506.

[17] Kervaire, M., *Courbure intégrale généralisée et homotopie*, Math. Ann., **131** (1956), 219–252.

[18] Kervaire, M., *Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **44** (1958), 280–283.

[19] Korbaš, J., *Vector fields on real flag manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., **3** (1985), 173–184.

[20] Korbaš, J., *On the Stiefel-Whitney classes and the span of real Grassmannians*, Czechoslovak Math. J., **36 (111)** (1986), 541–552.

[21] Korbaš, J., *On the vector field problem for $O(n)/O(1) \times O(1) \times O(n-2)$*, Acta Math. Hung., **105** (2004), 129–137.

[22] Korbaš, J., Szűcs, A., *The Lyusternik-Shnirel'man category, vector bundles, and immersions of manifolds*, Manuscr. Math., **95** (1998), 289–294.

[23] Korbaš, J., Zvengrowski, P., *The vector field problem: A survey with emphasis on specific manifolds*, Expo. Math., **12** (1994), 3–30.

[24] Korbaš, J., Zvengrowski, P., *On sectioning tangent bundles and other vector bundles*, Rend. Circ. Math. d. Palermo, **II-39** (1996), 85–104.

[25] Koschorke, U., *Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms – A Singularity Approach*, Lecture Notes in Math. 847, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[26] Kwak, J. H., *The parallelizability of Dold manifold*, Kyungpook Math. J., **24** (1984), 17–24.

[27] Lam, K. Y., *A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **213** (1975), 305–314.

[28] Leite, M. L., Miatello, I. D., *Linear vector fields on $\tilde{G}_k(R^n)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **80** (1980), 673–677.

[29] Madsen, I., *Lectures on Characteristic Classes in Algebraic Topology*, Lecture Notes for 3. Math. Summer Inst., Fudan Univ., Shanghai, 1986.

[30] McCleary, J., *A history of manifolds and fibre spaces: tortoises and hares*, Rend. Circ. Math. d. Palermo, **II-74** (2004), 9–29.

[31] Miatello, I. D., Miatello, R. J., *On stable parallelizability of $\tilde{G}_{k,n}$ and related manifolds*, Math. Ann., **259** (1982), 343–350.

[32] Milnor, J., *Some consequences of a theorem of Bott*, Ann. of Math., **68** (1958), 444–449.

[33] Milnor, J., Stasheff, J., *Characteristic Classes*, Ann. of Math. Studies 76, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1974.

[34] Mimura, M., Toda, H., *Topology of Lie Groups, I and II*, Transl. of Math. Monographs 91, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.

[35] Mukerjee, H. K., *Classification of homotopy Dold manifolds*, New York J. Math., **9** (2003), 271–293.

[36] Poincaré, H., *Analysis situs*, Rend. Circ. Math. d. Palermo, **13** (1899), 285–343.

[37] Radon, J., *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **1** (1922), 1–14.

[38] Saeki, O., *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Jap., **44** (1992), 551–566.

[39] Saeki, O., *Fold maps on 4-manifolds*, Comment. Math. Helv., **78** (2003), 627–647.

[40] Sankaran, P., Zvengrowski, P., *On stable parallelizability of flag manifolds*, Pacific J. Math., **122** (1986), 455–458.

[41] Sankaran, P., Zvengrowski, P., *Stable parallelizability of partially oriented flag manifolds*, Pacific J. Math., **128** (1987), 349–359.

[42] Singhof, W., *Parallelizability of homogeneous spaces, I*, Math. Ann., **260** (1982), 101–116.

[43] Singhof, W., Wemmer, D., *Parallelizability of homogeneous spaces, II*, Math. Ann., **274** (1986), 157–176.

[44] Singhof, W., Wemmer, D., *Parallelizability of homogeneous spaces, II (Erratum)*, Math. Ann., **276** (1987), 699–700.

[45] Sohn, M.-Y., *Span of product Dold manifolds*, Kyungpook Math. J., **31** (1991), 19–24.

[46] Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951.

[47] Stong, R. E., *Splitting universal bundles over flag manifolds*, Proc. Am. Math. Soc., **84** (1982), 576-580.

[48] Stong, R. E., *Vector bundles over Dold manifolds*, Fund. Math., **169** (2001), 85–95.

[49] Sutherland, W. A., *A note on the parallelizability of sphere-bundles over spheres*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 55-62.

[50] Thomas, E., *Vector fields on low dimensional manifolds*, Math. Zeitschr., **103** (1968), 85–93.

[51] Thomas, E., *Vector fields on manifolds*, Bull. Am. Math. Soc., **75** (1969), 643–683.