

2009/2010  
59. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

(Termín odovzdania: v pondelok 23. novembra 2009.)

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

2. Do kosoštvorca  $ABCD$  je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotyčnicu pretínajúcu obe strany  $BC$ ,  $CD$  a označme postupne  $R$ ,  $S$  jej priesečníky s priamkami  $AB$ ,  $AD$ . Dokážte, že hodnota súčinu  $|BR| \cdot |DS|$  od voľby dotyčnice nezávisí.

(Leo Boček)

3. Na tabuli sú napísané čísla  $1, 2, \dots, 33$ . V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom 1.) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať?

(Peter Novotný)

4. V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku  $ABC$  označme  $O$ ,  $V$  a  $S$  postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky  $OV$  prechádza bodom  $S$  práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka  $ABC$  má veľkosť  $60^\circ$ .

(Tomáš Jurík)

5. V nádrži je  $r_0$  rýb, spoločný úlovok  $n$  rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne  $n$ -tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo  $r_0$  v závislosti od daného  $n \geq 2$ , keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie.

(Dag Hrubý)

6. Pre dané prvočíslo  $p$  určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc  $(a, b, c)$  čísel z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ , ktoré spĺňajú vzťah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

pričom  $[x, y]$  označuje najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $y$ .

(Tomáš Jurík)