

## 63. ročník Matematickej olympiády 2013/2014

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z5

### Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: [skmo.sk](http://skmo.sk). Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu [skmo@skmo.sk](mailto:skmo@skmo.sk) v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke [skmo.sk/dokument.php?id=429](http://skmo.sk/dokument.php?id=429) nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Na kraji cesty je za sebou niekoľko rovnako dlhých parkovacích miest. Jeden autobus stál na piatom až siedmom mieste zľava, druhý autobus zaberá ôsme až desiate miesto sprava, inak bolo parkovisko prázdne. Neskôr tu zaparkovali ďalšie štyri autobusy a žiadny ďalší autobus už sa na parkovisko nezmestil. Určte, koľko najviac parkovacích miest mohlo byť na parkovisku, ak každý autobus zaberá presne tri parkovacie miesta. (Eva Patáková)

**Riešenie.** Máme určiť, koľko najviac miest môže byť na parkovisku, musíme teda zistiť, ako najmenej úsporne môžu byť autobusy zaparkované. Uvažujeme také rozmiestnenie, aby medzery medzi autobusmi boli najväčšie možné a súčasne také, aby sa do týchto medzier žiadny ďalší autobus nezmestil. Zo zadania vyplýva, že maximálna možná medzera pozostáva z dvoch parkovacích miest.

Znázorníme, ako boli autobusy zaparkované na začiatku:



Pred prvým autobusom sú štyri voľné miesta. Tam sa zmestí jeden autobus (a to dvojakým spôsobom).

Za druhým autobusom je sedem voľných miest. Tam by sa mohli zmestiť dva autobusy; ak je však jeden autobus zaparkovaný ako na nasledujúcom obrázku, tak sa tam už žiadny ďalší nezmestí:



Zvyšné dva autobusy budú zaparkované medzi pôvodnými dvoma autobusmi v strednej časti, ktorej dĺžku nepoznáme. Najmenej úsporné rozmiestnenie je také, aby medzera medzi každými dvoma autobusmi bola práve dve parkovacie miesta:



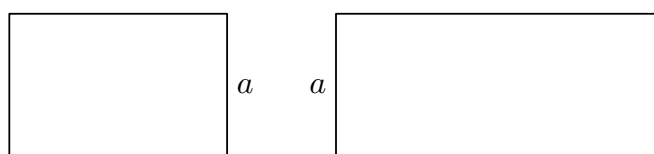
Vidíme, že medzi pôvodne vyznačenými parkovacími miestami môže byť najviac  $7 + 12 + 10 = 29$  parkovacích miest.

*Návrh hodnotenia.* 1 bod za umiestnenie jedného autobusu na ľavý koniec; 2 body za umiestnenie jedného autobusu na pravý koniec; 2 body za umiestnenie zvyšných dvoch autobusov medzi dva pôvodné (z toho 1 bod za zdôvodnenie); 1 bod za výsledný počet parkovacích miest.

---

**2.** Ľuboš rozdelil obdĺžnik jednou čiarou na dva menšie obdĺžniky. Obvod veľkého obdĺžnika je 76 cm, obvody menších obdĺžnikov sú 40 cm a 52 cm. Určte rozmery veľkého obdĺžnika. (Libor Šimůnek)

**Riešenie.** Spoločnú stranu dvoch menších obdĺžnikov označíme  $a$  a tieto dva obdĺžniky prekreslíme oddelené od seba.



Súčet obvodov dvoch menších obdĺžnikov je  $40 + 52 = 92$  (cm), čo je o 16 cm viac ako obvod pôvodného obdĺžnika, lebo  $92 - 76 = 16$ . Týchto 16 cm zodpovedá dvom stranám  $a$ , strana  $a$  má preto dĺžku  $16 : 2 = 8$  (cm).

Rovnakú dĺžku majú aj dve strany pôvodného obdĺžnika, súčet dĺžok jeho zvyšných dvoch strán je  $76 - 2 \cdot 8 = 60$  (cm), každá z nich je teda dlhá  $60 : 2 = 30$  (cm). Rozmery pôvodného veľkého obdĺžnika sú 30 cm a 8 cm.

*Návrh hodnotenia.* 4 body za kratšiu stranu obdĺžnika (z toho 2 za zdôvodnenie); 2 body za dlhšiu stranu obdĺžnika (z toho 1 za zdôvodnenie).

---

**3.** Juraj a Peter spustili stopky a niekedy v priebehu prvých 15 sekúnd od spustenia každý z nich začal tleskať. Juraj po svojom prvom tlesknutí tleskal pravidelne každých 7 sekúnd, Peter po svojom prvom tlesknutí tleskal pravidelne každých 13 sekúnd. V 90. sekunde tleskli obaja naraz. Určte všetky možnosti, kedy mohol začať tleskať Juraj a kedy Peter. (Lenka Dedková)

**Riešenie.** Postupne od konca vypíšeme, v kolkej sekunde tleskal Juraj a v kolkej Peter.

- Juraj: 90, 83, 76, 69, 62, 55, 48, 41, 34, 27, 20, **13**, **6**.
- Peter: 90, 77, 64, 51, 38, 25, **12**.

Čas prvého tlesknutia má byť menší alebo rovný 15 sekundám. Juraj preto mohol začať tleskať v šiestej alebo trinástej sekunde, Peter musel začať tleskať v dvanástej sekunde.

**Iné riešenie.** Rovnaký výsledok možno dosiahnuť pomocou delenia so zvyškom.

- Keďže  $90 : 7$  je 12, zvyšok 6, znamená to, že Juraj mohol začať tleskať v 6. sekunde (a do 90. sekundy tleskol ešte dvanásťkrát).
- Keďže  $90 : 13$  je 6, zvyšok 12, znamená to, že Peter mohol začať tleskať v 12. sekunde (a do 90. sekundy tleskol ešte šesťkrát).

Postupne vypisujeme ďalšie tlesknutia oboch chlapcov a zvýrazňujeme tie, ktoré vyhovujú podmienke v zadaní:

- Juraj: **6**, **13**, 20, ...
- Peter: **12**, 25, ...

*Návrh hodnotenia.* Po 3 bodoch za výpis a odpoveď u každého z chlapcov. Ak riešiteľ zabudne pri Jurajovi druhé riešenie, strhnite jeden bod.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014