63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9*

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 17. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`. *Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Jana mala za domácu úlohu vypočítať súčin dvoch šesťciferných čísel. Pri prepisovaní druhého z nich z tabule zabudla odpísať jednu cifru a tak namiesto celého šesťciferného čísla napísala iba päťciferné číslo* 85522. *Keď bola doma, zistila svoj omyl. Pamätala si však, že číslo, ktoré zle odpísala, bolo deliteľné tromi. Rozhodla sa, že sa pokúsi určiť, aké mohlo byť pôvodné číslo. Zistite, koľko takých šesťciferných čísel existuje.*

(*Monika Dillingerová*)

Riešenie. Celé číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný tromi. Súčet cifier odpísaného čísla je

$$8 + 5 + 5 + 2 + 2 = 22,$$

čo nie je číslo deliteľné tromi. Vynechaná cifra teda nebola 0 a ciferný súčet pôvodného čísla musí byť väčší. Najbližšie väčšie čísla deliteľné tromi sú 24, 27, 30, 33 atď. Keby bol ciferný súčet 24, 27, resp. 30, bola by vynechanou cifrou 2, 5, resp. 8. (Ciferný súčet 33 a viac sa nedá dostať doplnením jedinej cifry.)

Teraz treba určiť, na ktoré miesta možno tieto cifry doplniť tak, aby vzniklo zakaždým iné číslo. To najjednoduchšie zistíme vypísaním všetkých možností:

- 285522, 825522, 852522, 855222,
- 585522, 855522, 855252, 855225,
- 885522, 858522, 855822, 855282, 855228.

Celkom teda existuje 13 možností.

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie vynechanej cifry a zdôvodnenie; 3 body za vypísanie všetkých možných čísel (alebo za správne vysvetlenie, koľko ich je, aj bez ich vypísania); 1 bod za počet možností.

2. *Renáta zostrojila lichobežník $PRST$ so základňami PR a ST, v ktorom súčasne platí:*

- *lichobežník $PRST$ nie je pravouhlý,*
- *trojuholník TRP je rovnostranný,*
- *trojuholník TRS je pravouhlý,*
- *jeden z trojuholníkov TRS a TRP má obsah* $10\,\mathrm{cm}^2$.

Určte obsah druhého z týchto dvoch trojuholníkov; nájdite všetky možnosti.

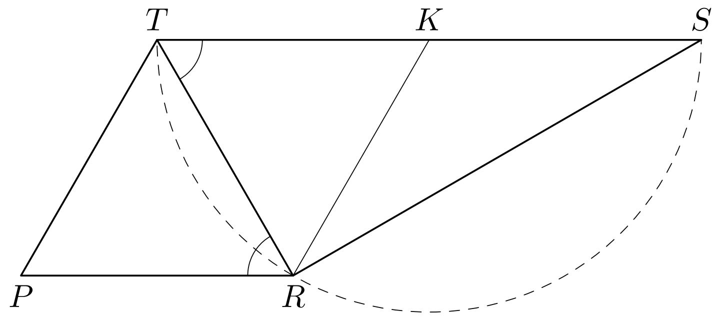
(*Michaela Petrová*)

Riešenie. Z druhej podmienky vieme, že trojuholník TRP je rovnostranný, preto všetky jeho vnútorné uhly majú veľkosť $60°$. Uhly TRP a STR sú striedavé, preto je aj veľkosť uhla STR rovná $60°$.

Z tretej podmienky vieme, že trojuholník TRS je pravouhlý. Z predchádzajúceho odseku vieme, že pravý uhol nemôže byť pri vrchole T, zároveň z prvej podmienky vyplýva, že pravý uhol nemôže byť ani pri vrchole S. Takže pravý uhol je pri vrchole R. Ďalej označme K stred prepony ST trojuholníka TRS. Keďže je tento trojuholník pravouhlý, leží vrchol R na kružnici so stredom K a polomerom $|KS| = |KT|$. Platí teda

$$|KS| = |KT| = |KR|.$$

Trojuholník TRK je teda rovnoramenný so základňou RT. Navyše z predchádzajúceho vieme, že uhol RTK má veľkosť $60°$, preto aj druhý uhol pri základni má veľkosť $60°$. Trojuholník TRK je teda rovnostranný a navyše zhodný s rovnostranným trojuholníkom TRP.



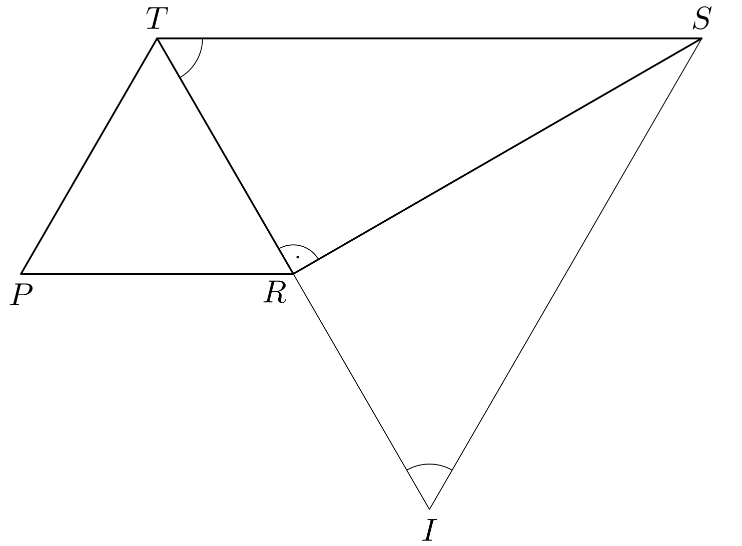
Trojuholníky TRP a TRK majú rovnaký obsah, pretože sú zhodné. Trojuholníky TRK a SRK majú rovnaký obsah, pretože strany KT a KS sú rovnako dlhé a výška na tieto strany je spoločná. To znamená, že trojuholník TRS má dvakrát väčší obsah ako trojuholník TRP,

$$S_{TRS} = 2S_{TRP}. \tag{1}$$

Zo štvrtej podmienky vieme, že obsah jedného z týchto dvoch trojuholníkov je $10\,\mathrm{cm}^2$:

- Ak $S_{TRS} = 10\,\mathrm{cm}^2$, tak $S_{TRP} = 5\,\mathrm{cm}^2$.
- Ak $S_{TRP} = 10\,\mathrm{cm}^2$, tak $S_{TRS} = 20\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom riešení určíme vnútorné uhly trojuholníka TRS. Bod T zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi RS, symetrický bod označíme I. Všetky vnútorné uhly trojuholníka TIS majú veľkosť $60°$, trojuholník je teda rovnostranný.



Strana TI je dvojnásobkom strany TR, trojuholníky TRP a TIS sú teda podobné s pomerom podobnosti 1 : 2. Preto sú ich obsahy v pomere 1 : 4,

$$S_{TIS} = 4S_{TRP}.$$

Trojuholník TRS tvorí polovicu trojuholníka TIS, jeho obsah je teda dvakrát väčší ako obsah trojuholníka TRP. Tak prichádzame ku vzťahu (1) a úlohu uzavrieme rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za určenie veľkostí vnútorných uhlov RTS a TRS; 3 body za zdôvodnenie rovnosti (1); 1 bod za výsledné obsahy $5\,\mathrm{cm}^2$ a $20\,\mathrm{cm}^2$.

---

3. *Lenka mala papierový kvietok s ôsmimi okvetnými lístkami. Na každom lístku bola napísaná práve jedna cifra a žiadna z cifier sa na žiadnom inom lístku neopakovala. Keď sa Lenka s kvietkom hrala, uvedomila si niekoľko vecí:*

- *Z kvietka bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol rovnaký ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.*
- *Tiež bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol dvakrát väčší ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.*
- *Dokonca bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol štyrikrát väčší ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.*

Určte, aké cifry mohli byť napísané na okvetných lístkoch. (Erika Novotná)

Riešenie. Z prvej podmienky vieme, že lístky sa dajú rozdeliť na dve skupiny tak, že súčet jednej skupiny čísel je rovnaký ako súčet druhej. Z toho vyplýva, že súčet všetkých čísel napísaných na lístkoch musí byť deliteľný dvoma. Podobnou úvahou z druhej podmienky odvodzujeme, že súčet všetkých napísaných čísel je deliteľný tromi; z poslednej podmienky vyplýva, že tento súčet musí byť deliteľný aj piatimi. Súčet všetkých napísaných čísel je preto deliteľný 30.

Súčet všetkých použiteľných cifier je $0 + 1 + \cdots + 8 + 9 = 45$, a preto je vyššie diskutovaný súčet rovný práve 30. Na lístkoch teda neboli použité také dve cifry, ktorých súčet bol rovný 15. To mohli byť buď cifry 7 a 8, alebo 6 a 9. V oboch prípadoch musíme overiť, či je možné otrhať lístky s ostatnými ciframi tak, aby platili podmienky zo zadania.

- Overme možnosť, keď na kvietku neboli cifry 7 a 8:
  Po trhaní podľa prvej podmienky mohli zostať napr. cifry $0+1+5+9=15$,
  po trhaní podľa druhej podmienky mohli zostať napr. cifry $0+1+3+6=10$,
  po trhaní podľa tretej podmienky mohli zostať cifry $0+1+2+3=6$.
- Overme možnosť, keď na kvietku neboli cifry 6 a 9:
  Po trhaní podľa prvej podmienky mohli zostať napr. cifry $0+2+5+8=15$,
  po trhaní podľa druhej podmienky mohli zostať napr. cifry $0+1+2+7=10$,
  po trhaní podľa tretej podmienky mohli zostať cifry $0+1+2+3=6$.

Na okvetných lístkoch teda mohli byť buď všetky cifry okrem 7 a 8, alebo všetky okrem 6 a 9.

Návrh hodnotenia. 2 body za odvodenie toho, že celkový súčet napísaných čísel je deliteľný 30; 2 body za určenie oboch dvojíc cifier, ktoré mohli byť vynechané; 2 body za kontrolu, či je možné otrhať lístky podľa zadania.

Za riešenie obsahujúce iba jednu možnosť bez princípu deliteľnosti 30 dajte nanajvýš 3 body.

---

4. *V hostinci U temného lesa obsluhujú obrie dvojčatá Pravdoslav a Krivomír. Pravdoslav je poctivý a účtuje vždy presne, Krivomír je nečestný a ku každému koláču a každému džbánku medoviny vždy pripočíta dva grajciare. Raz tento hostinec navštívilo sedem trpaslíkov, ktorí si sadli k dvom stolom. Trpaslíci zaplatili za štyri koláče u jedného obra rovnako veľa ako za tri džbánky medoviny u druhého. Inokedy trpaslíci platili za štyri džbánky medoviny u Pravdoslava o 21 grajciarov viac ako za tri koláče u Krivomíra. Určte, koľko stál jeden koláč a koľko jeden džbánok medoviny. Všetky ceny sú v celých grajciaroch a medzi oboma návštevami sa tieto ceny nijako nemenili.*

(*Michaela Petrová, Monika Dillingerová*)

Riešenie. Skutočnú cenu (cenu u Pravdoslava) jedného džbánku medoviny označme m a skutočnú cenu jedného koláča označme k. Pri prvej návšteve mohli trpaslíci platiť koláče u Pravdoslava a medovinu u Krivomíra, alebo naopak. Tomu zodpovedajú dve rôzne vyjadrenia:

$$4k = 3(m+2), \tag{1a}$$

alebo

$$4(k+2) = 3m. \tag{1b}$$

Podľa informácie o druhej návšteve vieme, že platí

$$4m = 3(k+2) + 21. \tag{2}$$

Riešením sústavy rovníc (1a) a (2) je dvojica

$$k = 15,\ m = 18,$$

riešením sústavy rovníc (1b) a (2) je dvojica

$$k = 7,\ m = 12.$$

Úloha má teda dve riešenia: Buď stál koláč 15 grajciarov a džbánok medoviny 18 grajciarov, alebo koláč 7 grajciarov a džbánok medoviny 12 grajciarov.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za sformulovanie každej z podmienok (1a), (1b) a (2); po 1 bode za doriešenie každej zo sústav rovníc; 1 bod za výsledok.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014