63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok*

$$a + 3b + c = 6,$$
$$-a + b - c = 2.$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Sčítaním oboch rovníc zistíme, že $b = 2$. Dosadením za b do niektorej z nich vyjde $c = -a$. Platí teda $V = (a-2)^2 + (2+a)^2 + (-2a)^2$. Po umocnení a sčítaní zistíme, že $V = 6a^2 + 8 \geqq 8$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 0$, $b = 2$ a $c = 0$.

Hľadaná najmenšia hodnota výrazu V je teda rovná 8.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 5 + (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré x ju výraz nadobúda?

N2. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je W minimálne? [$W = (a-3)^2 \geqq 0$]

N3. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je Y minimálne? [$Y = 3 + W \geqq 3$]

N4. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 8$. Pre ktoré hodnoty a, b je K maximálne? [$K = 5 + 8a - a^2 = -(a-4)^2 + 21 \leqq 21$, $a = b = 4$]

N5. Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0$. [C–54–I–1]

N6. Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

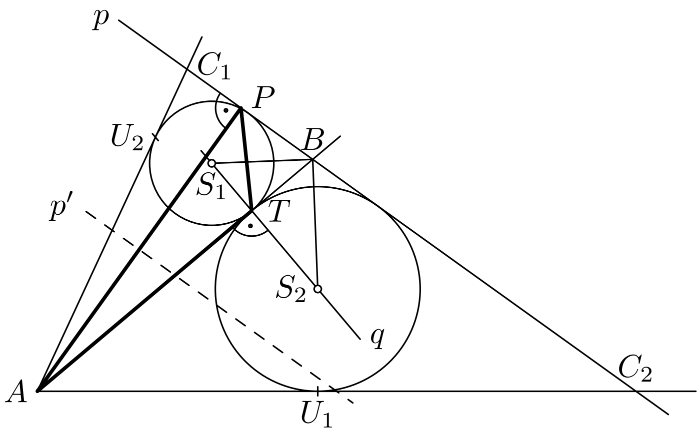
$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$? [C–62–I–2]

2. *V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov.*

(Pavel Leischner)

Riešenie. Vrchol B je určený polpriamkou AT a kolmicou p na výšku AP v bode P (obr. 1), na ktorej leží strana BC. Pritom bod T musí byť vnútorným bodom úsečky AB. Stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC potom dostaneme ako priesečník kolmice q



Obr. 1

na priamku AT v bode T s osou uhla ohraničeného priamkou p a polpriamkou BA. Jej polomer bude mať veľkosť $|ST|$.

Ostáva zostrojiť vrchol C hľadaného trojuholníka ABC. Ten bude ležať jednak na priamke p, jednak na druhej dotyčnici vpísanej kružnice z vrcholu A, ktorá je súmerne združená so stranou AB podľa priamky AS. Stačí teda zostrojiť bod U dotyku strany AC s kružnicou vpísanou ako obraz bodu T v uvedenej osovej súmernosti.

Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:

1. $p\colon P \in p$ a $p \perp AP$;
2. $B\colon B \in AT \cap p$, bod B musí ležať na polpriamke AT za bodom T;
3. $q\colon T \in q$ a $q \perp AT$;
4. u_1, u_2: dve (navzájom kolmé) osi rôznobežiek AB, p;
5. $S_1, S_2\colon S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;
6. U_1, U_2: obrazy bodu T v súmernostiach podľa priamok AS_1 a AS_2;
7. C_1, C_2: priesečníky priamky p s polpriamkami AU_1 a AU_2;
8. trojuholníky ABC_1 a ABC_2.

Diskusia. Bod B konštruovaný v 2. kroku existuje, len ak uhol PAT je ostrý (inak ani polpriamka AT nepretne priamku p) a zároveň bod T leží vnútri polroviny pA, čo je ekvivalentné s tým, že aj uhol APT je ostrý. Body S_1, S_2 existujú vždy a sú rôzne, lebo ležia v opačných polrovinách určených priamkou AB. Kružnica vpísaná leží celá v trojuholníku ABC, a teda i v páse určenom priamkou p a priamkou s ňou rovnobežnou, ktorá prechádza vrcholom A, takže stred S vpísanej kružnice musí padnúť do pásu tvoreného priamkou p a priamkou p' s ňou rovnobežnou, ktorá rozpoľuje výšku AP. V takom prípade dotyčnica ku kružnici $(S; |ST|)$ (súmerne združená s dotyčnicou AB podľa priamky AS) určite pretne priamku p v hľadanom vrchole C.

Diskusiu zhrnieme takto: Ak pre vnútorné uhly trojuholníka APT platí $|\measuredangle PAT| \geqq 90°$ alebo $|\measuredangle APT| \geqq 90°$, nemá úloha riešenie. Ak platí $|\measuredangle PAT| < 90°$ a zároveň $|\measuredangle APT| < 90°$, je počet riešení 0 až 2 podľa toho, koľko zo zostrojených bodov S_1 a S_2 leží medzi rovnobežkami p a p'.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zostrojte trojuholník, ak sú dané body dotyku jeho strán s kružnicou tomuto trojuholníku vpísanou.

N2. V trojuholníku ABC označme postupne P, Q, R päty výšok z vrcholov A, B, C. Ďalej postupne označme T, U, V body dotyku kružnice vpísanej so stranami BC, CA, AB. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:
 a) A, C, V,
 b) A, U, R,
 c) A, P, Q,
 d) A, B, R.
 [V a) i b) vieme zostrojiť vpísanú kružnicu; v c) zostrojíme AB ako priemer kružnice určenej danými bodmi. Úloha d) nemá riešenie, pokiaľ R neleží na priamke AB. Ak R leží na priamke AB, má úloha nekonečne veľa riešení.]

---

3. *Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n.*

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Nech $n = pqr$, $p < q < r$. Rovnosť $(p+1)(q+1)r = pqr + 915$ ekvivalentne upravíme na tvar $(p+q+1) \cdot r = 915 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, z ktorého vyplýva, že prvočíslo r môže nadobudnúť len niektorú z hodnôt 3, 5 a 61. Pre $r = 3$ ale z poslednej rovnice dostávame $(p+q+1)\cdot 3 = 3\cdot 5\cdot 61$, čiže $p+q = 304$. To je spor s tým, že r je najväčšie. Analogicky zistíme, že nemôže byť ani $r = 5$. Je teda $r = 61$ a $p+q = 14$. Vyskúšaním všetkých možností pre p a q vyjde $p = 3$, $q = 11$, $r = 61$ a $n = 3\cdot 11\cdot 61 = 2\,013$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky prvočísla p, q, pre ktoré platí $p+q = 14$.

N2. Číslo n je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo n. [Výsledok: $n \in \{14, 21, 35\}$.]

N3. Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme jedno z nich o 1 a druhé o 1 zmenšíme, ich súčin ostane nezmenený. Určte číslo n. [Výsledok: $n = 6$.]

N4. Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo n. [Výsledok: $n \in \{93, 145, 253, 289\}$.]

---

4. *Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm.* (*Leo Boček*)

Riešenie. Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 2), takže pravouhlé trojuholníky AKD a DLC sú zhodné podľa vety *sus*. Okrem toho sú trojuholníky MLD a AKD podobné podľa vety *uu*, lebo $|\measuredangle LDM| = |\measuredangle KDA|$ a $|\measuredangle DLM| = |\measuredangle DLC| = |\measuredangle AKD|$. Analogicky sa dá overiť i podobnosť trojuholníkov MDC a AKD. Z podobnosti trojuholníkov AKD, MLD a MDC vyplýva, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\mathrm{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\mathrm{cm}$. Obsahy útvarov MLD, MDC a $AKML$ sú

$$S_{MLD} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1\,\mathrm{cm}^2, \qquad S_{MDC} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4\,\mathrm{cm}^2$$

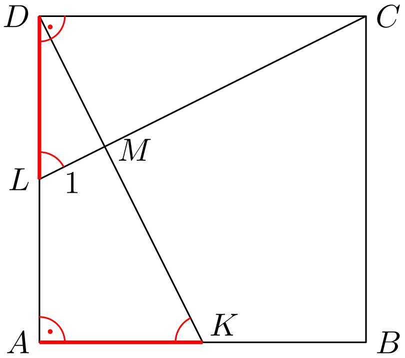
a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\mathrm{cm}^2.$$

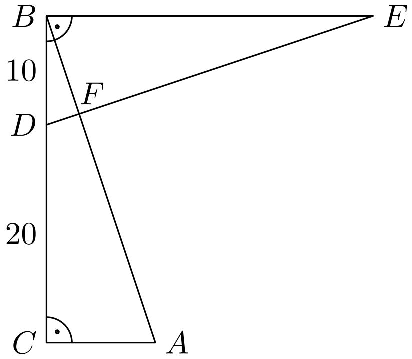
Nakoniec pomocou Pytagorovej vety dostávame $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\mathrm{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\mathrm{cm}^2.$$

Záver. Obsahy trojuholníkov MLD, MDC a štvoruholníkov $AKML$, $KBCM$ sú postupne $1\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $11\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 2



Obr. 3

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dva zhodné pravouhlé trojuholníky ABC a DEB sú umiestnené podľa obr. 3 a platí $|BD| = 10\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 20\,\mathrm{cm}$.

a) Určte dĺžky strán trojuholníka ABC. [10, 30, $10\sqrt{10}$]

b) Dokážte, že trojuholníky DBF, ABC a BEF sú navzájom podobné.

c) Určte dĺžky strán trojuholníkov DBF a BEF. [10, $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$; 30, $9\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$]

d) Určte obsahy trojuholníkov ABC, DBF a BEF. [150, 15, 135]

e) Určte obsah štvoruholníka $AFDC$. [135]

N2. Dva zhodné pravouhlé trojuholníky ABC a DEB sú umiestnené podľa obr. 3. Trojuholník BEF má obsah $30\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $AFDC$. [30]

N3. Dokážte vety:

a) Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.

b) Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

N4. V rovnoramennom pravouhlom trojuholníku ABC s preponou BC je $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Označme K stred strany AB a L taký bod strany BC, pre ktorý platí $|CL| : |LB| = 1 : 2$. Určte obsahy útvarov, ktoré vzniknú rozrezaním trojuholníka ABC pozdĺž úsečiek KC a AL. [Nakreslite si obrázok, označte M priesečník úsečiek KC a AL, dokreslite úsečku BM a pomocou viet z predošlej úlohy vypočítajte najprv obsahy všetkých piatich trojuholníkov, ktoré majú spoločný vrchol M.]

N5. V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$. [C–57–S–2]

---

5. *Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Keďže $96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 2^5$, budeme dokazovať deliteľnosť súčtu $S = n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dvoma nesúdeliteľnými číslami 3 a 32.

Deliteľnosť tromi: Pretože číslo 2 013 je deliteľné tromi, stačí dokázať deliteľnosť tromi zmenšeného súčtu

$$S - 2\,013 = n^4 + 2n^2 = n^2(n^2 + 2).$$

V prípade $3 \mid n$ je všetko jasné, v opačnom prípade je $n = 3k \pm 1$ pre vhodné celé k, takže platí $3 \mid n^2 + 2$, lebo $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$.

Deliteľnosť číslom 32: Keďže $2\,016 = 32 \cdot 63$, stačí dokázať deliteľnosť číslom 32 zmenšeného súčtu

$$S - 2\,016 = n^4 + 2n^2 - 3 = (n^2 + 1)^2 - 2^2 = (n^2 + 3)(n^2 - 1).$$

Predpokladáme, že n je nepárne, teda $n = 2k + 1$ pre vhodné celé k, preto platí

$$n^2 + 3 = (2k + 1)^2 + 3 = 4(k^2 + k + 1) \quad \text{a} \quad n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1).$$

Odtiaľ vyplýva, že $32 \mid (n^2 + 3)(n^2 - 1)$, lebo číslo $k(k + 1)$ je párne.

Poznámka. Deliteľnosť číslom 32 sa dá dokazovať i bez vykonaného algebraického rozkladu trojčlena $n^4 + 2n^2 - 3$, z ktorého po dosadení $n = 2k + 1$ roznásobením dostaneme

$$n^4 + 2n^2 - 3 = 16k^4 + 32k^3 + 32k^2 + 16k = 16k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1).$$

Pre párne k je deliteľnosť takto upraveného výrazu číslom 32 zrejmá. Pre nepárne k je zase párny súčet $k^3 + 1$, takže je párny i druhý činiteľ $k^3 + 2k^2 + 2k + 1$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé prirodzené n je číslo $n^3 + 2n$ deliteľné tromi.

N2. Dokážte, že pre každé nepárne číslo n je číslo $n^2 - 1$ deliteľné ôsmimi.

N3. Dokážte, že pre všetky celé kladné čísla n je rozdiel $n^6 - n^2$ deliteľný šesťdesiatimi.

N4. Určte všetky kladné celé čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120. [C–55–I–1]

N5. Určte všetky celé čísla n, pre ktoré je $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ prvočíslo. [C–62–I–5]

---

6. *Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Poslední štyria hráči odohrali medzi sebou 6 partií, takže počet bodov, ktoré dokopy získali, je aspoň 6. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, teda získal aspoň 6 bodov. Keby získal viac ako 6, teda aspoň 6,5 bodov, musel by najlepší hráč (vďaka podmienke rôznych počtov) získať všetkých 7 možných bodov; porazil by tak i hráča na 2. mieste, ktorý by v dôsledku toho získal menej ako 6,5 bodov, a to je spor. Hráč v poradí druhý preto získal práve 6 bodov. Presne toľko ale získali dokopy i poslední štyria, a tak mohli tieto body získať len zo vzájomných partií, čo znamená, že prehrali všetky partie s hráčmi z prvej polovice výsledného poradia. Hráč, ktorý skončil na 6. mieste, preto prehral partiu s hráčom, ktorý skončil na 4. mieste.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Šachového turnaja, v ktorom každý s každým odohral jednu partiu, sa zúčastnilo n hráčov. Koľko partií bolo odohratých? Koľko bodov získali všetci dokopy, ak za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu a za prehru žiadny bod? [$\frac{1}{2}n(n-1)$]

N2. Šachového turnaja sa podľa pravidiel z predošlej úlohy zúčastnili 4 hráči. Víťaz turnaja získal rovnaký počet bodov ako zvyšní traja hráči dokopy.

a) Aký najväčší a aký najmenší počet bodov mohol mať? [Získal práve 3 body.]

b) Koľko partií mohlo skončiť remízou, ak na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov? [Buď 0, alebo 1, alebo 2.]

N3. Hokejového turnaja sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé odohralo s každým práve jedno stretnutie. Počet gólov vstrelených v každom stretnutí delí celkový počet gólov vstrelených v turnaji, pritom v žiadnych dvoch stretnutiach ich nepadol rovnaký počet. Koľko najmenej mohlo v turnaji padnúť gólov? [C–55–S–1]

N4. Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún? [C–58–I–1]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Pavel Novotný, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013