63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1. *V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu*

$$2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|.$$

(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Os reálnych čísel rozdelíme podľa nulových bodov, teda podľa čísel, pre ktoré sú hodnoty výrazov s absolútnou hodnotou v danej rovnici rovné nule. Výrazu $|x+1|$ zodpovedá $x = -1$ a výrazu $|2^x - 1|$ zodpovedá $x = 0$. Dostávame tak nasledujúce tri možnosti:

1) V prípade $x \leqq -1$ vyjde $|x+1| = -(x+1)$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnica zo zadania má potom tvar

$$2^{-(x+1)} - 2^x = 1 + 1 - 2^x, \quad \text{čiže} \quad 2^{-(x+1)} = 2$$

a má jediné riešenie $x = -2$. Spätným dosadením sa presvedčíme, že je to naozaj riešenie danej rovnice.

2) V prípade $-1 < x \leqq 0$ vyjde $|x+1| = x+1$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnica zo zadania má potom tvar

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 1 - 2^x, \quad \text{čiže} \quad 2^{x+1} = 2$$

a má jediné riešenie $x = 0$. Spätným dosadením sa presvedčíme, že je to naozaj riešenie danej rovnice.

3) Nakoniec pre $0 < x$ vyjde $|x+1| = x+1$ a $|2^x - 1| = 2^x - 1$ a po dosadení do danej rovnice dostaneme

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 2^x - 1, \quad \text{čiže} \quad 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x,$$

čo je identita, ktorá platí pre ľubovoľné reálne číslo x. Všetky $x > 0$ sú teda riešením danej rovnice.

Odpoveď. Riešeniami danej rovnice sú $x = -2$ a ľubovoľné $x \geqq 0$.

Poznámka. Namiesto kontroly riešenia dosadením do danej rovnice stačí overiť, že nájdené riešenie padne do vyšetrovaného intervalu.

Iné riešenie. Rozoberieme dva prípady:

Ak $x + 1 \geqq 0$, tak $|x+1| = x+1$ a danú rovnicu možno zjednodušiť na rovnicu

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + |2^x - 1|, \quad \text{čiže} \quad 2^x - 1 = |2^x - 1|.$$

Tá je splnená práve vtedy, keď $2^x - 1 \geqq 0$, čo platí práve vtedy, keď $x \geqq 0$. V tomto prípade sú riešeniami všetky x také, že $x+1 \geqq 0$ a zároveň $x \geqq 0$, čiže všetky nezáporné čísla x.

Ak naopak $x + 1 < 0$, je tiež $2^x - 1 < 0$ (lebo $x < 0$), takže daná rovnica dostane tvar

$$2^{-(x+1)} - 2^x = 1 - (2^x - 1), \quad \text{čiže} \quad 2^{-(x+1)} = 2.$$

Táto rovnica má jediné riešenie $x = -2$ a to podmienku $x + 1 < 0$ spĺňa.

Riešením danej rovnice je množina $\langle 0, \infty) \cup \{-2\}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ postupuje pomocou nulových bodov, dajte za ich určenie 1 bod. Za vyriešenie prípadu $-1 \leqq x$ dajte 2 body, správne vyriešený prípad $x > 0$ ohodnoťte 2 bodmi a za posledný prípad $-1 < x \leqq 0$ dajte 1 bod. Ak riešenie rozoberá iba dve možnosti ako v druhom riešení, dajte za každú časť 3 body. Za uhádnutie všetkých riešení dajte 1 bod, za uhádnutie len niektorých (i keď nekonečne veľa) body nedávajte.

2. *Množina M obsahuje 2014 rôznych reálnych čísel. Súčet každých dvoch rôznych čísel z množiny M je celé číslo.*

a) Rozhodnite, či existuje taká množina M, ktorá neobsahuje žiadne celé číslo.

b) Rozhodnite, či existuje taká množina M, ktorá obsahuje iracionálne číslo.

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Na vyriešenie časti a) stačí uviesť príklad množiny, ktorá neobsahuje žiadne celé číslo, pričom súčet ľubovoľných dvoch jej prvkov je celé číslo. Množina $M = \{1/2, 3/2, \ldots, 4027/2\}$ je jedným z príkladov takej 2014-prvkovej množiny.

Označme a, b, c ľubovoľné tri čísla danej množiny M. Ukážeme, že dvojnásobok čísla a je celé číslo. Čísla $a+b$ aj $b+c$ sú podľa zadania celé, preto aj ich rozdiel $a-c$ je celé číslo. Zo zadania vieme, že aj číslo $a+c$ je celé, preto aj súčet $(a+c)+(a-c)=2a$ je celé číslo. Dvojnásobok každého čísla v množine M teda musí byť celé číslo, a preto množina M nemôže obsahovať žiadne iracionálne číslo.

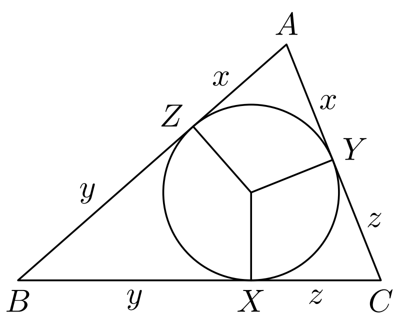
Iné riešenie. Časť a) vyriešime rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Pripusťme, že sa v množine M nájde iracionálne číslo a, a označme α, $0 < \alpha < 1$, jeho desatinnú časť. Všetky ostatné čísla z množiny M (a takých je tam 2013) musia mať desatinnú časť $1-\alpha$, lebo súčet každého z nich s číslom a dáva celé číslo. Ale súčet každých dvoch čísel s kladnou desatinnou časťou $1-\alpha$ tiež musí dať celé číslo. To je možné jedine v prípade, že $1-\alpha = 1/2$ čiže $\alpha = 1/2$, čo je však v spore s tým, že číslo a je iracionálne. Množina M, ktorá by obsahovala iracionálne číslo, teda neexistuje.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nájdenie vyhovujúcej množiny pre časť a) dajte 2 body. Za zistenie, že aj rozdiel dvoch čísel z množiny M je celé číslo, dajte 2 body. Za korektné dokončenie časti b) dajte zvyšné 2 body. V prípade, že študent postupuje podľa druhého riešenia, v časti b) získava 2 body za zistenie, že všetky ostatné čísla majú rovnakú desatinnú časť, a zvyšné 2 body za zistenie, že táto necelá časť môže byť jedine 1/2. Štyri body dajte aj za priamy dôkaz silnejšieho tvrdenia, že každé číslo z M je buď celé, alebo má desatinnú časť rovnú 1/2.

3. *Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej.* (*Šárka Gergelitsová*)

Riešenie. V danom trojuholníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vpísanej kružnice s jeho stranami a $x = |AY| = |AZ|$, $y = |BX| = |BZ|$, $z = |CX| = |CY|$ zhodné úseky dotyčníc k vpísanej kružnici z jednotlivých vrcholov (obr. 1). Ak označíme



Obr. 1

zvyčajným spôsobom a, b, c dĺžky jednotlivých strán, platí

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme (pomocou s ako zvyčajne označujeme polovičný obvod trojuholníka)

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z,$$

takže nám vyjde

$$x + y + z = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \tag{1}$$

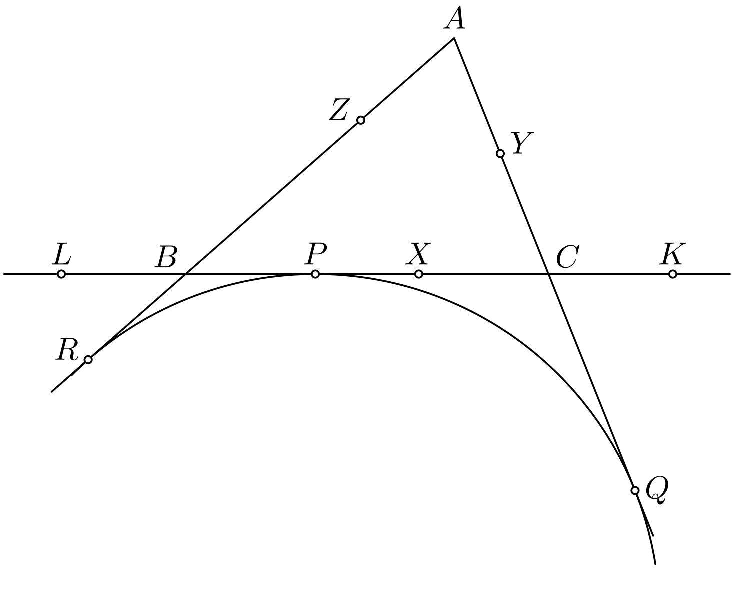
Pozrime sa teraz na pripísanú kružnicu trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka jeho strany BC v bode P a polpriamok AB a AC v bodoch R a Q (obr. 2). Zo zhodnosti úsekov príslušných dotyčníc k tejto kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkiaľ vychádza

$$\begin{aligned} 2|AR| = |AR| + |AQ| &= |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ &= |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s, \end{aligned}$$

čiže $|AR| = |AQ| = s$. Z tejto rovnosti ale vyplýva, že $|BP| = |BR| = s - c$, čo je podľa (1) zároveň dĺžka z úsečky CX, teda $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC.



Obr. 2

Analogicky by sme odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pre body dotyku K a L kružníc pripísaných stranám CA a AB (obr. 2) trojuholníka ABC s priamkou a. Z týchto posledných rovností však vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, teda aj body K a L sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC.

Body K a L sú známe (z troch daných bodov na priamke sú to tie dva krajné), poznáme teda aj stred S strany BC (je to stred úsečky KL) a bod X nájdeme ako obraz tretieho daného bodu P v stredovej súmernosti podľa stredu S.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za určenie stredu strany BC pomocou súmerne združených bodov dotyku kružníc pripísaných ostatným dvom stranám. Tri body tiež dajte za poznatok, že aj body dotyku pripísanej a vpísanej kružnice na jednej strane trojuholníka sú súmerne združené podľa stredu strany. Len za odvodenie všetkých vzdialeností bodov dotyku od vrcholov B a C bez nájdenia konštrukcie dajte 4 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 14. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014