63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*

<u>*Informácia pre krajskú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

---

1. *Hviezdičky v schéme predstavujú 16 bezprostredne po sebe idúcich prirodzených násobkov čísla tri napísaných zľava doprava od najmenšieho po najväčší. Pritom čísla v prvom rámiku majú rovnaký súčet ako čísla v druhom rámiku. Určte najmenšie z týchto 16 čísel.*

$$\boxed{*,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *},\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ \boxed{*,\ *,\ *,\ *,\ *}$$

(*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Porovnajme posledné, teda najväčšie čísla oboch rámikov: najväčšie číslo druhého rámika leží o 10 miest vpravo od najväčšieho čísla prvého rámika, je teda o 30 väčšie. Rovnakým porovnaním zistíme, že druhé najväčšie čísla v rámikoch sa líšia tiež o 30, rovnako tak tretie najväčšie, štvrté najväčšie aj piate najväčšie čísla. Súčet všetkých piatich čísel druhého rámika je teda o $5 \cdot 30 = 150$ väčší ako súčet piatich najväčších čísel prvého rámika. Aby boli v rámikoch rovnaké súčty, musí byť zvyšné číslo prvého rámika práve 150. Najmenšie číslo tejto postupnosti je teda 150.

Iné riešenie. Najskôr hľadajme 16 po sebe bezprostredne idúcich prirodzených čísel spĺňajúcich podmienku o rovnakých súčtoch. Ak nájdené čísla vynásobíme tromi, vynásobia sa tromi aj súčty v rámikoch a ich rovnosť teda zostane zachovaná. Týmto postupom dôjdeme k žiadanému výsledku a pritom si zjednodušíme výpočty, lebo budeme v úvode pracovať s menšími číslami.

Najmenšie číslo v postupnosti bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel označíme x a vyjadríme súčet čísel v prvom rámiku:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 6x + 15.$$

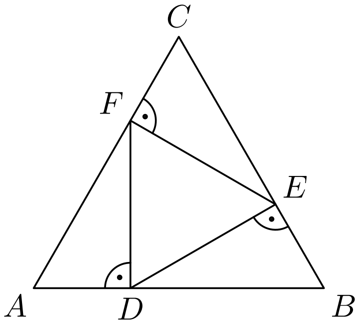
Prvé číslo v druhom rámiku je pri danom označení rovné $x + 11$. Vyjadríme súčet čísel v druhom rámiku:

$$x + 11 + x + 12 + x + 13 + x + 14 + x + 15 = 5x + 65.$$

Riešením rovnice $6x + 15 = 5x + 65$ dostaneme $x = 50$. Vynásobením tromi dostaneme prvé číslo postupnosti násobkov troch, týmto číslom je teda $50 \cdot 3 = 150$.

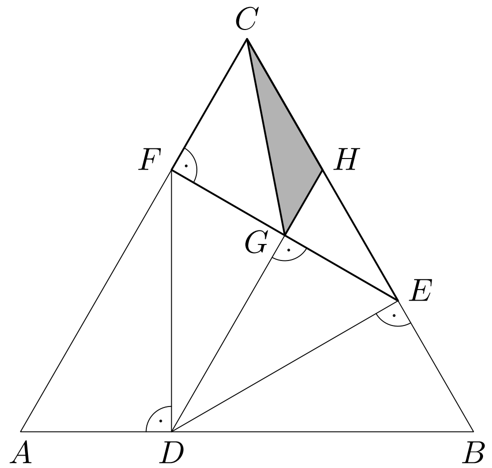
Návrh hodnotenia. 2 body za výsledok; 4 body za vysvetlenie postupu.

2. *V rovnostrannom trojuholníku ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník DEF. Vrcholy D, E a F ležia na stranách AB, BC a AC tak, že strany trojuholníka DEF sú kolmé na strany trojuholníka ABC (tak ako na obr.). Ďalej platí, že úsečka DG je ťažnicou v trojuholníku DEF a bod H je priesečníkom priamok DG a BC. Určte pomer obsahov trojuholníkov HGC a DBE.* (Eva Patáková)



Riešenie. Zo symetrie celého útvaru (príp. z vety *usu*) vyplýva, že trojuholníky BED a CFE sú zhodné. Budeme teda určovať pomer obsahov trojuholníkov HGC a CFE.

Trojuholník DEF je rovnostranný, preto v ňom ťažnice a výšky splývajú, ťažnica DG je teda kolmá na úsečku EF. Podľa zadania sú kolmé aj úsečky EF a AC, preto sú priamky AC a DG, resp. FC a GH rovnobežné. Keďže DG je ťažnicou trojuholníka DEF, leží bod G v strede úsečky EF. Z toho vyplýva, že GH je strednou priečkou trojuholníka CFE.



Keďže trojuholníky HGC a HGE majú spoločnú stranu HG a výšky prislúchajúce k tejto strane sú rovnaké (menovite $|FG| = |GE|$), majú tieto trojuholníky rovnaký obsah. Keďže trojuholníky HGE a CFE sú podobné a zodpovedajúce strany sú v pomere $1 : 2$, sú obsahy týchto trojuholníkov v pomere $1 : 4$. (Strana GH je dvakrát menšia ako strana FC a výška trojuholníka HGE na stranu GH je dvakrát menšia ako výška trojuholníka CFE na stranu FC; obsah prvého trojuholníka je teda štyrikrát menší ako obsah druhého.)

Pomer obsahov trojuholníkov HGC a BED je rovný $1 : 4$.

Poznámka. Ak označíme dĺžku úsečky BE ako a, môžeme v závislosti na tejto veličine vyjadriť obsahy trojuholníkov HGC a BED.

Z rovnobežnosti priamok AC a DH vyplýva, že trojuholník DBH je rovnostranný a trojuholník BED je jeho polovicou. Preto $|BD| = |BH| = 2a$ a veľkosť DE vypočítame pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku BED:

$$|DE| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Trojuholník DEF je rovnostranný, teda $|EF| = |DE| = a\sqrt{3}$. Bod G je v strede úsečky EF, teda

$$|GF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trojuholníky BED a CFE sú zhodné, teda $|CF| = |BE| = a$. Úsečka GH je strednou priečkou trojuholníka CFE, teda

$$|GH| = \frac{a}{2}.$$

Teraz môžeme vyjadriť obsahy skúmaných trojuholníkov:

$$S_{BED} = \frac{1}{2}|BE| \cdot |DE| = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3},$$
$$S_{HGC} = \frac{1}{2}|GH| \cdot |GF| = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}.$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za zistenie rovnobežnosti priamok AC a DG; 2 body za určenie $|GH| = \frac{1}{2}|FC|$; 3 body za vyjadrenie hľadaných obsahov, resp. ich pomeru.

---

3. *Danka mala papierový kvietok s desiatimi okvetnými lístkami. Na každom lístku bola napísaná práve jedna cifra a žiadna z cifier sa na žiadnom inom lístku neopakovala. Danka odtrhla dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom deviatich. Potom odtrhla ďalšie dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom ôsmich. Nakoniec odtrhla ďalšie dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom desiatich. Určte, aké mohli byť súčty čísel po každom odtrhávaní; nájdite všetky možnosti.* (*Erika Novotná*)

Riešenie. Súčet všetkých čísel na okvetných lístkoch je $0+1+\cdots+9 = 45$. Danka mohla pri každom trhaní odtrhnúť súčet najmenej 1 (keby odtrhla lístky 0 a 1) a najviac 17 (keby odtrhla lístky 8 a 9).

- Po prvom trhaní musel na kvietku zostať súčet z intervalu 28 až 44 ($45 - 17 = 28$ a $45 - 1 = 44$). Medzi týmito číslami je jediný násobok deviatich, a síce 36.
- Po druhom trhaní musel na kvietku zostať súčet z intervalu 35 až 19 ($36 - 17 = 19$ a $36 - 1 = 35$). Medzi týmito číslami sú dva násobky ôsmich, a síce 32 a 24.
- Podobne stanovíme možné súčty po treťom trhaní:
  - Ak po druhom trhaní zostal súčet 32, musel po treťom trhaní zostať súčet z intervalu 15 až 31 ($32 - 17 = 15$ a $32 - 1 = 31$). Medzi týmito číslami sú dva násobky desiatich, a síce 30 a 20.
  - Ak po druhom trhaní zostal súčet 24, musel po treťom trhaní zostať súčet z intervalu 7 až 23 ($24 - 17 = 7$ a $24 - 1 = 23$). Medzi týmito číslami sú dva násobky desiatich, a síce 20 a 10.

Po jednotlivých trhaniach teda mohli zostať nasledujúce trojice súčtov:

$$(36, 32, 20),\ (36, 32, 30),\ (36, 24, 20),\ (36, 24, 10).$$

Pri každej z týchto možností musíme overiť, či sa dá naozaj zrealizovať, t. j. či sa dajú dvojice lístkov odtrhnúť tak, aby žiadna cifra nebola použitá dvakrát. V nasledujúcej schéme píšeme nad šípky príklad, aké lístky mohli byť v jednotlivých krokoch odtrhnuté:

$$45 \xrightarrow{0,9} 36 \xrightarrow{1,3} 32 \xrightarrow{4,8} 20$$
$$45 \xrightarrow{4,5} 36 \xrightarrow{1,3} 32 \xrightarrow{0,2} 30$$
$$45 \xrightarrow{2,7} 36 \xrightarrow{4,8} 24 \xrightarrow{1,3} 20$$
$$45 \xrightarrow{2,7} 36 \xrightarrow{4,8} 24 \xrightarrow{5,9} 10$$

Vidíme, že všetky uvedené možnosti sa dajú zrealizovať, úloha má štyri riešenia.

Návrh hodnotenia. 2 body za nájdenie štyroch možností; 2 body za overenie, že každá z možností sa dá zrealizovať; 2 body za postup, ktorý vylučuje zabudnutie ďalšej možnosti, príp. za zdôvodnenie, že žiadna ďalšia možnosť neexistuje.

---

4. *Štyri dievčatá hrali na sústredení niekoľko zápasov. Keď sčítame počty výhier dvoch dievčat dokopy (pre všetky možné dvojice dievčat), dostaneme čísla 8, 10, 12, 12, 14 a 16. Určte, koľko výhier vybojovalo každé z dievčat.* (Marta Volfová)

Riešenie. Označme počty výhier jednotlivých dievčat a, b, c, d. Keby niektoré dve dievčatá mali rovnaký počet výhier, museli by medzi súčtami v zadaní byť aspoň dve dvojice rovnakých čísel (keby platilo napr. $a = b$, platilo by $a + c = b + c$ a tiež $a + d = b + d$). To však nie je pravda, teda čísla a, b, c, d sú navzájom rôzne.

Ak zoradíme tieto čísla vzostupne $a < b < c < d$, tak platí

$$a + b < a + c < a + d < b + d < c + d$$

a súčasne

$$a + c < b + c < b + d.$$

Vzhľadom na to, že sú v zadaní dve čísla s rovnakou hodnotou, musí byť $a + d = b + c$. Podľa zadania zostavíme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} a + b &= 8,\\ a + c &= 10,\\ b + c &= 12,\\ a + d &= 12,\\ b + d &= 14,\\ c + d &= 16. \end{aligned}$$

Z 1. a 2. rovnice vyplýva, že $c = b + 2$. Po dosadení do 3. rovnice dostávame $b + b + 2 = 12$, teda $b = 5$. Ak dosadíme za b do 1., 3., resp. 5. rovnice, získame aj hodnoty ostatných neznámych: $a = 3$, $c = 7$, resp. $d = 9$.

Pri riešení sústavy sme nepoužili 4. a 6. rovnicu, ich platnosť preto musíme overiť dosadením vypočítaných hodnôt: $3 + 9 = 12$, $7 + 9 = 16$.

Jednotlivé dievčatá vybojovali 3, 5, 7 a 9 výhier.

Návrh hodnotenia. 2 body za zostavenie sústavy rovníc a zdôvodnenie, že až na označenie a usporiadanie neznámych je táto sústava určená jednoznačne; 4 body za vyriešenie sústavy (ak nie je prevedená skúška pri rovniciach, ktoré neboli použité pri riešení, strhnite 1 bod).

Poznámka. Na vyriešenie úlohy nie je nutné zostavovať a riešiť sústavu rovníc, celý postup možno vyjadriť slovne. Hodnotenie takého riešenia je obdobné vyššie uvedenému.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014