

2013/2014  
63. ročník MO

Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A

(Súťaž sa konala 23. – 26. 3. 2014.)

1. Nech  $n$  je celé kladné číslo. Označme všetky jeho kladné delitele  $d_1, d_2, \dots, d_k$  tak, aby platilo  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  (čiže  $d_1 = 1$  a  $d_k = n$ ). Určte všetky také hodnoty  $n$ , pre ktoré platí  $d_5 - d_3 = 50$  a  $11d_5 + 8d_7 = 3n$ . (Matúš Harminc)

2. V rovine, v ktorej je daná úsečka  $AB$ , uvažujme trojuholníky  $XYZ$  také, že  $X$  je vnútorným bodom úsečky  $AB$ , trojuholníky  $XYZ$  a  $XZA$  sú podobné ( $\triangle XBY \sim \triangle XZA$ ) a body  $A, B, Y, Z$  ležia v tomto poradí na kružnici. Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek  $YZ$ . (Michal Rolínek, Jaroslav Švrček)

3. Majme šachovnicu  $8 \times 8$  a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžniky  $2 \times 1$  tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel. (Michal Rolínek)

4. Do kina prišlo 234 divákov. Určte, pre ktoré  $n \geq 4$  sa mohlo stať, že divákov bolo možné rozadiť do  $n$  radov tak, aby každý divák v  $i$ -tom rade sa poznal práve s  $j$  divákmi v  $j$ -tom rade pre ľubovoľné  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . (Vzťah známosti je vzájomný.) (Tomáš Jurík)

5. Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$ . Označme  $k$  kružnicu s priemerom  $AB$ . Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla  $BAC$  v bode  $A$  a prechádza bodom  $C$ , pretína kružnicu  $k$  v bode  $P$ ,  $P \neq A$ . Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla  $ABC$  v bode  $B$  a prechádza bodom  $C$ , pretína kružnicu  $k$  v bode  $Q$ ,  $Q \neq B$ . Dokážte, že priesečník priamok  $AQ$  a  $BP$  leží na osi uhla  $ACB$ . (Peter Novotný)

6. Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla  $a$  a  $b$  dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)