63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Nech n je celé kladné číslo. Označme všetky jeho kladné delitele d_1, d_2, ..., d_k tak, aby platilo $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (čiže $d_1 = 1$ a $d_k = n$). Určte všetky také hodnoty n, pre ktoré platí $d_5 - d_3 = 50$ a $11d_5 + 8d_7 = 3n$.* *(Matúš Harminc)*

Riešenie. Rozlíšime, či hľadané n je nepárne alebo párne.

(i) Nech n je nepárne, potom aj všetky d_i sú nepárne. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ vyplýva $d_7 \mid 11d_5$ a tiež $d_5 \mid 8d_7$ čiže $d_5 \mid d_7$. Z $d_5 \mid d_7 \mid 11d_5$ vzhľadom na $d_7 > d_5$ máme $d_7 = 11d_5$ a po dosadení do rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme $99d_5 = 3n$, čiže $33d_5 = n$. Vidíme, že štyri čísla 1, 3, 11 a 33 sú delitele čísla n, a to dokonca jediné delitele menšie ako 50, pretože pre piaty deliteľ d_5 už podľa zadania platí $d_5 = d_3 + 50 > 50$. Máme teda $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 11$, $d_4 = 33$, $d_5 = d_3 + 50 = 61$, a preto $n = 33d_5 = 33 \cdot 61 = 2\,013$. Toto číslo naozaj vyhovuje, lebo jeho najmenšie delitele sú v predchádzajúcej vete vypísané správne, navyše platí $d_6 = 61 \cdot 3$ a $d_7 = 61 \cdot 11$, takže je naozaj splnené $d_7 = 11d_5$, teda i všetko požadované.

(ii) Nech n je párne. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ potom vyplýva $2 \mid d_5$, takže aj $2 \mid d_5 - 50 = d_3$. Keďže $d_1 = 1$ a $d_2 = 2$, nemôže byť $d_3 = 3$, takže je buď $d_3 = 4$, alebo $d_3 = 2t$, pričom $t > 2$. Posledné však možné nie je (číslo $t < d_3$ by chýbalo vo výpise najmenších deliteľov čísla n), a preto je nutne $d_3 = 4$. Potom je ale $d_5 = d_3 + 50 = 54$, a teda $3 \mid n$, napriek tomu, že 3 nie je medzi najmenšími deliteľmi čísla n. Žiadne vyhovujúce párne n preto neexistuje.

Odpoveď. Úloha má jediné riešenie $n = 2\,013$.

Iné riešenie. Pre delitele $d_5 < d_7$ máme $d_5 = n/x$ a $d_7 = n/y$, pričom $x > y$ sú opäť kladné delitele čísla n. Dosadením do $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme po vydelení n rovnicu $11/x + 8/y = 3$, ktorú v obore všetkých celých kladných čísel štandardne vyriešime, napríklad úpravou na súčinový tvar:

$$8x = y(3x - 11) \;\Leftrightarrow\; 8(3x - 11) + 88 = 3y(3x - 11) \;\Leftrightarrow\; (3x - 11)(3y - 8) = 88.$$

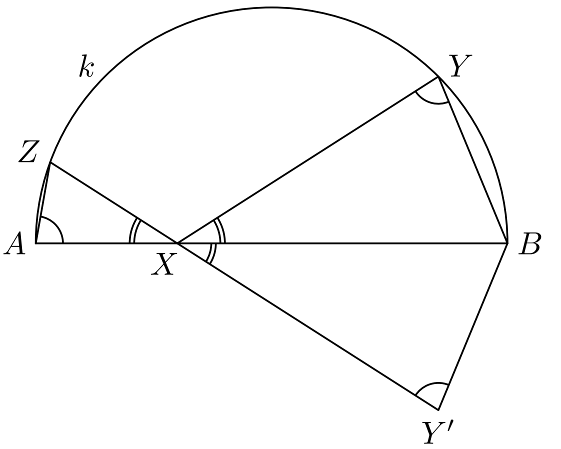
Z prvej upravenej rovnice máme $3x - 11 > 0$, takže z poslednej aj $3y - 8 > 0$; vzhľadom na $x \geqq y + 1$ teda platí $3x - 11 \geqq 3y - 8 > 0$. Pre usporiadanú dvojicu činiteľov z rozkladu čísla 88 preto dostávame možnosti

$$(3x - 11, 3y - 8) \in \{(88, 1), (44, 2), (22, 4), (11, 8)\}.$$

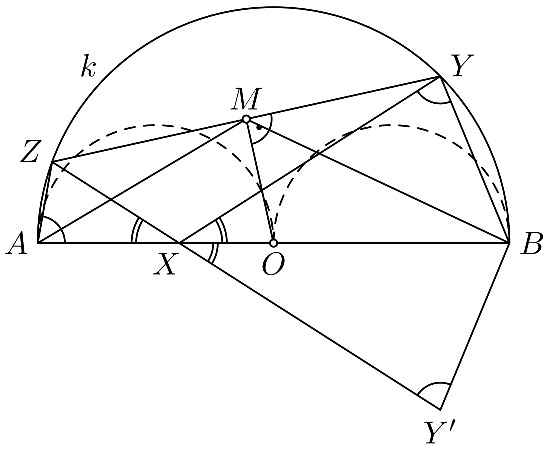
Podľa zvyškov modulo 3 však vyhovujú iba dvojice $(88, 1)$ a $(22, 4)$, ktorým zodpovedajú páry (x, y) rovné $(33, 3)$, resp. $(11, 4)$. Pre prvý z nich máme $d_5 = n/33$ (a $d_7 = n/3$), takže 1, 3, 11 a 33 sú delitele čísla n, odkiaľ rovnako ako v prvom riešení dôjdeme k hľadanému $n = 2\,013$. Pre $(x, y) = (11, 4)$ čiže $d_5 = n/11$ a $d_7 = n/4$ má číslo n delitele 1, 2, 4, 11, 22, 44, čo je v spore s nerovnosťou $d_5 > 50$.

2. *V rovine, v ktorej je daná úsečka AB, uvažujme trojuholníky XYZ také, že X je vnútorným bodom úsečky AB, trojuholníky XBY a XZA sú podobné ($\triangle XBY \sim \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z ležia v tomto poradí na kružnici. Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek YZ.* (Michal Rolínek, Jaroslav Švrček)

Riešenie. Podľa zadania ležia body Y a Z v tej istej polrovine s hraničnou priamkou AB. Zostrojme obraz Y' bodu Y v súmernosti podľa priamky AB. Vzhľadom na predpokladanú podobnosť sú uhly XAZ a BYX zhodné (obr. 1), takže je aj $|\measuredangle BAZ| = = |\measuredangle BY'Z|$. Z tejto rovnosti ale podľa vety o obvodových uhloch vyplýva, že na kružnici k opísanej trojuholníku ABZ leží nielen bod Y, ale aj bod Y'. Priamka AB ako os tetivy YY' tak prechádza stredom O kružnice k, takže tetiva AB je jej priemerom. Kružnica k je teda vzhľadom na voľbu bodu Z nezávislá. Stred M jej tetivy YZ preto nutne leží vo vnútornej oblasti kružnice k. Z pravých uhlov OMZ a OMY (obr. 2) vidíme, že (menšie) uhly AMO a BMO sú ostré, takže bod M nutne leží v prieniku vonkajších oblastí Tálesových kružníc nad priemermi AO a BO. Ukážeme, že obe nutné podmienky na polohu bodu M už spolu vymedzujú hľadanú množinu.



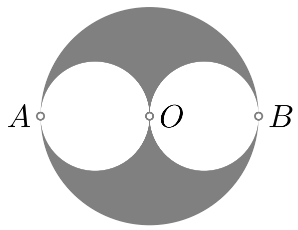
Obr. 1



Obr. 2

Nech M je ľubovoľný bod vo vnútornej oblasti kružnice k, pre ktorý sú oba uhly AMO a BMO ostré (t. j. bod M leží zvonka oboch kruhov s priemermi AO a BO). Potom zrejme kolmica na priamku OM v bode M pretína kružnicu k v polrovine ABM, takže na jednej z Tálesových polkružníc nad priemerom AB vytína tetivu, ktorej krajné body môžeme označiť Y a Z tak, aby A, B, Y, Z bolo poradím bodov na kružnici k. Ak je Y' obraz bodu Y na druhej polkružnici v súmernosti podľa priemeru AB, tak pre priesečník X úsečiek AB a $Y'Z$ platí, že trojuholníky XBY a XZA sú podobné podľa vety *uu*. Dôkaz je hotový.

Záver. Hľadanou množinou je vnútro kruhu s priemerom AB a stredom O bez oboch kruhov s priemermi AO a BO (obr. 3).



Obr. 3

---

3. *Majme šachovnicu 8×8 a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžničky 2×1 tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Dotyčných hrán je $7\cdot 8 = 56$ zvislých a rovnaký počet vodorovných, celkom ich je $56\cdot 2 = 112$. Pri ľubovoľnom rozrezaní šachovnice vznikne 32 obdĺžničkov 2×1, preto sa každé také rozrezanie týka práve $112-32 = 80$ hrán, a prispeje tak do celkového súčtu číslom 80. Výsledný súčet je teda deliteľný číslom 80, takže jeho dekadický zápis končí nulou.

---

4. *Do kina prišlo 234 divákov. Určte, pre ktoré $n \geqq 4$ sa mohlo stať, že divákov bolo možné rozsadiť do n radov tak, aby každý divák v i-tom rade sa poznal práve s j divákmi v j-tom rade pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. (Vzťah známosti je vzájomný.)* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme p_k počet divákov v k-tom rade. Podmienka úlohy pre dané i a j znamená, že počet známostí medzi divákmi z i-teho a j-teho radu je rovný jp_i. Prehodením úloh čísel i a j zistíme, že ten istý počet sa má rovnať číslu ip_j. Musí teda platiť $jp_i = ip_j$ čiže $p_i : p_j = i : j$. Prichádzame tak k záveru, že počty p_k divákov v jednotlivých radoch nutne spĺňajú podmienku

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = 1 : 2 : \ldots : n.$$

Ukážeme, že je to aj podmienka postačujúca, teda že pri počtoch $p_k = kd$ pre vhodné celé d sa rozsadení diváci mohli poznať tak, aby podmienka zo zadania úlohy bola splnená. Pre $d = 1$ to tak určite bude, keď sa budú navzájom poznať všetci diváci v kine; pre všeobecné d stačí, aby diváci boli rozdelení na d skupín navzájom sa poznajúcich divákov a aby diváci z každej takej skupiny boli rozsadení do jednotlivých radov rovnako ako v prípade $d = 1$.

Našou úlohou je preto zistiť, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje celé kladné číslo d vyhovujúce rovnici

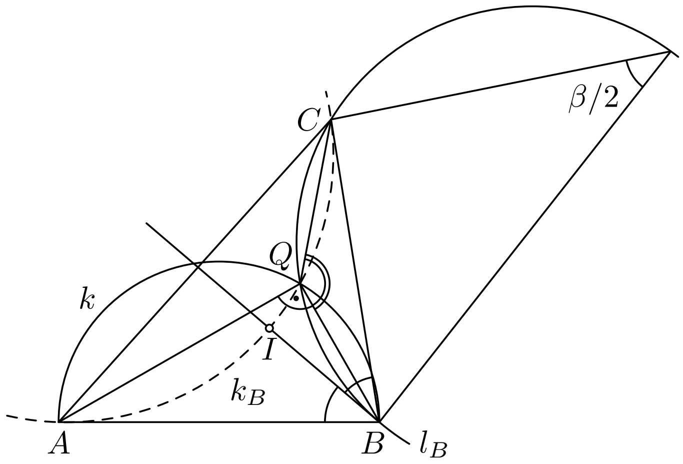
$$d + 2d + \ldots + nd = 234, \quad \text{čiže} \quad dn(n+1) = 468.$$

Hľadáme teda všetky delitele čísla $468 = 2^2\cdot 3^2\cdot 13$, ktoré sú tvaru $n(n+1)$. Keďže $22\cdot 23 > 468$, musí platiť $n < 22$, teda $n \in \{4, 6, 9, 12, 13, 18\}$. Vidíme, že vyhovuje jedine $n = 12$ (s príslušným $d = 3$).

Odpoveď. Opísaná situácia mohla nastať jedine pri rozsadení divákov do 12 radov.

5. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme k kružnicu s priemerom AB. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla BAC v bode A a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode P, $P \neq A$. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla ABC v bode B a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode Q, $Q \neq B$. Dokážte, že priesečník priamok AQ a BP leží na osi uhla ACB.* (Peter Novotný)

Riešenie. Uvažované kružnice opísané trojuholníkom APC a BQC označme postupne l_A, l_B a všimnime si napríklad druhú z nich (obr. 4, uhly trojuholníka ABC označujeme zvyčajným spôsobom).



Obr. 4

Vysvetlime, že naozaj platí, čo na obrázku vidíme. Predovšetkým bod Q zrejme leží v polrovine BCA, lebo pre body X tamojšieho oblúka BC kružnice l_B sa uhol AXB zväčšuje z (ostrého) uhla γ na (tupý) uhol $180° - \beta/2$, takže nadobúda niekde vnútri oblúka hodnotu $90°$. Keďže úsekový uhol prislúchajúci tomuto oblúku BC kružnice l_B je rovný $\beta/2$, je $|\angle BQC| = 180° - \beta/2$. Odtiaľ $|\angle AQB| + |\angle BQC| = 270° - \beta/2 > 180°$. Preto bod Q leží v polrovine ACB, čiže aj vnútri trojuholníka ABC, konvexný uhol AQC má teda veľkosť $90° + \beta/2$. Ak označíme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, bude mať uhol AIC takú istú veľkosť: $|\angle AIC| = 180° - \alpha/2 - \gamma/2 = 90° + \beta/2$. To však znamená, že bod Q leží na rovnakom oblúku AC kružnice k_B opísanej trojuholníku ACI ako bod I, takže priamka AQ je chordálou kružníc k a k_B.

Druhá uvažovaná priamka BP je analogicky chordálou kružníc k a k_A (ktorá je opísaná trojuholníku BCI). Priesečník oboch priamok AQ a BP má teda rovnakú mocnosť ku kružniciam k_A a k_B, preto leží na ich chordále, ktorou je priamka CI, teda os uhla ACB. Dôkaz je hotový.

Poznámka. Ešte jedným spôsobom vysvetlíme, prečo bod Q leží v polrovine BCA. Priesečník Q kružníc k a l_B zrejme musí ležať v polrovine ABC v uhle ohraničenom dotyčnicami oboch kružníc v bode B. Pritom vrchol C ostrouhlého trojuholníka ABC aj stred S_B kružnice l_B zrejme ležia zvonka kruhu ohraničeného kružnicou k. V trojuholníku BS_BC leží síce časť kružnice k, ale s výnimkou bodov B a C tam určite neleží žiadny iný bod kružnice l_B. Z toho je zrejmé, že bod Q musí ležať v polrovine BCA.

6. *Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla a a b dokážte nerovnosť*

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

Riešenie. Jednoduchým dosadením zistíme, že dokazovaná nerovnosť prejde na rovnosť, ak platí aspoň jedna z rovností $a = 0$, $b = 0$ alebo $a = b$. Z ďalšieho postupu vyplynie, že sú to jediné prípady rovnosti.

Vzhľadom na symetriu budeme predpokladať, že platí $a > b > 0$, a postupnými ekvivalentnými úpravami dokážeme ostrú nerovnosť zo zadania, ktorú rovno zapíšeme zbavenú zlomkov:

$$a\sqrt{a^2+1}\sqrt{ab+1} + b\sqrt{b^2+1}\sqrt{ab+1} > (a+b)\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}.$$

Teraz roznásobíme pravú stranu zastúpeným súčtom $a+b$ a po preskupení výrazov vyjmeme spoločné činitele:

$$a\sqrt{a^2+1}\bigl(\sqrt{ab+1} - \sqrt{b^2+1}\bigr) > b\sqrt{b^2+1}\bigl(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{ab+1}\bigr)$$

Na ľavej aj pravej strane vystupujú rozdiely odmocnín, rozšírime ich súčtami tých istých odmocnín na zlomky:

$$a\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1} + \sqrt{b^2+1}} > b\sqrt{b^2+1} \cdot \frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{ab+1}}.$$

Obe strany teraz môžeme vydeliť kladným číslom $ab(a-b)$; po následnom odstránení zlomkov dostaneme nerovnosť

$$\sqrt{a^2+1}\bigl(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{ab+1}\bigr) > \sqrt{b^2+1}\bigl(\sqrt{b^2+1} + \sqrt{ab+1}\bigr),$$

ktorej platnosť už vyplýva z porovnania odmocnín na rovnakých miestach oboch strán (vďaka predpokladu $a > b$ totiž platí $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1}$).

Iné riešenie. Tentoraz z nášho postupu vylúčime iba prípady $a = 0$ a $b = 0$, v ktorých je však dokazovaná nerovnosť triviálna. Budeme teda predpokladať, že čísla a a b sú kladné a zapíšeme pre ne Cauchyho nerovnosť

$$\left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right)(au + bv) \geqq (a+b)^2$$

s kladnými koeficientmi $u = \sqrt{b^2+1}$ a $v = \sqrt{a^2+1}$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\left(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}\right) \geqq (a+b)^2. \tag{1}$$

Druhý činiteľ z ľavej strany (1) odhadneme *zhora* podľa inej Cauchyho nerovnosti takto:

$$\begin{aligned} a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1} &= \sqrt{a}\sqrt{ab^2+a}+\sqrt{b}\sqrt{a^2b+b} \leqq \\ &\leqq \sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b} = \sqrt{a+b}\sqrt{(a+b)(ab+1)} = (a+b)\sqrt{ab+1}. \end{aligned}$$

Pre prvý činiteľ z ľavej strany (1) tak dostávame

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}},$$

čo sme mali dokázať. Keďže v prvej vypísanej Cauchyho nerovnosti nastáva rovnosť práve vtedy, keď platí $u=v$, čiže $\sqrt{b^2+1}=\sqrt{a^2+1}$, t. j. $a=b$, je posledná rovnosť tretím a posledným prípadom (okrem spomenutých prípadov $a=0$ a $b=0$), kedy v dokazovanej nerovnosti nastáva rovnosť.

Iné riešenie. Vylúčime z úvah zrejmé prípady $a=0$, $b=0$, $a=b$ a dokazovanú ostrú nerovnosť ekvivalentne upravíme na tvar

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

Ľavá strana je zrejme ľavou stranou Jensenovej nerovnosti

$$pf(\alpha)+qf(\beta) > f(p\alpha+q\beta) \tag{2}$$

s kladnými koeficientmi $p=a/(a+b)$ a $q=b/(a+b)$ (ktoré, ako vieme, musia spĺňať podmienku $p+q=1$) pre funkciu $f(x)=1/\sqrt{x}$ v bodoch $\alpha=b^2+1$ a $\beta=a^2+1$. Keďže funkcia f je na obore kladných čísel rýdzo konvexná[1] a body α, β sú rôzne vďaka predpokladu $a\neq b$, Jensenova nerovnosť (2) platí. Ostáva sa teda presvedčiť, že aj jej pravá strana sa rovná pravej strane upravenej nerovnosti z úvodu riešenia. To je jednoduché:

$$\begin{aligned} f(p\alpha+q\beta) &= f\Big(\frac{a}{a+b}(b^2+1)+\frac{b}{a+b}(a^2+1)\Big) = \\ &= f\left(\frac{a+ab^2+b+a^2b}{a+b}\right) = f(ab+1) = \frac{1}{\sqrt{ab+1}}. \end{aligned}$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014

[1] Graf funkcie $y=x^{-\frac{1}{2}}$ je dobre známy.