63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

1. *Po okružnej linke v meste ide električka, v ktorej je 300 cestujúcich. Na každej zastávke sa odohrá jedna z nasledujúcich situácií:*

- *ak je v električke aspoň 7 cestujúcich, tak ich 7 vystúpi,*
- *ak je v električke menej ako 7 cestujúcich, tak 5 nových cestujúcich pristúpi.*

Vysvetlite, prečo v istom okamihu v električke neostane žiadny cestujúci. Potom zistite, koľko by malo byť na začiatku v električke cestujúcich, aby sa električka nikdy nevyprázdnila. (Ján Mazák)

Nápad. Skúste uvažovať menšie počty cestujúcich.

Riešenie. Nejaký čas budú cestujúci z električky len vystupovať. Po 42 zastaveniach zostane v električke $300 - 42 \cdot 7 = 6$ ľudí. Podľa uvedených pravidiel sa počet cestujúcich bude ďalej vyvíjať nasledovne:

$$\dots 6,\ 11,\ 4,\ 9,\ 2,\ 7,\ 0.$$

V električke teda neostane žiadny cestujúci.

Teraz si predstavme všeobecnú situáciu, keď je v električke neznámy počet ľudí. Títo budú postupne vystupovať, kým ich nebude v električke menej ako 7. To znamená, že bez ohľadu na to, koľko ľudí bolo v električke na začiatku, časom bude ich počet rovný niektorému z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6. Stačí teda uvažovať iba tieto možnosti.

V predchádzajúcom odseku sme zistili, že ak v električke zostanú 6, 4, alebo 2 cestujúci, tak sa električka nakoniec vyprázdni. Ak v električke zostane 5 cestujúcich, tak sa ich počet bude ďalej meniť takto:

$$\dots,\ 5,\ 10,\ 3,\ 8,\ 1,\ 6,\ \dots$$

Túto situáciu už poznáme; električka sa nakoniec vyprázdni. V postupnosti sa objavujú aj čísla 3 a 1, čím sme vyčerpali všetky možnosti. Bez ohľadu na počiatočný počet cestujúcich sa električka nakoniec vždy vyprázdni.

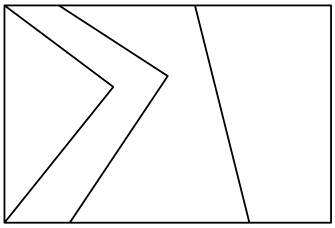
Poznámka. Skúste si rozmyslieť, ako riešenie úlohy ovplyvňujú čísla 7 a 5 zo zadania. Vyprázdnila by sa električka vždy aj pre inú dvojicu čísel?

---

2. *Mamička delí čokoládu, ktorá má 6×4 rovnakých dielikov, svojim štyrom deťom. Ako môže mamička čokoládu rozdeliť na práve štyri časti s rovnakým obsahom tak, aby jeden útvar bol trojuholník, jeden štvoruholník, jeden päťuholník a jeden šesťuholník?* (Erika Novotná)

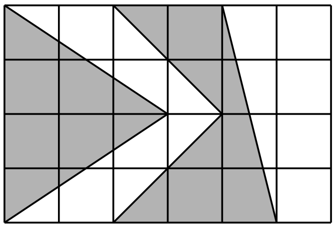
Nápad. Skúste najskôr rozdeliť obdĺžnik na požadované útvary bez podmienky rovnosti obsahov. Potom pozmeňte svoje delenie tak, aby obsahy útvarov boli rovnaké.

Riešenie. Rozdelíme obdĺžnik na požadované útvary, zatiaľ bez ohľadu na rovnosť obsahov. Tu je jedna z možností:

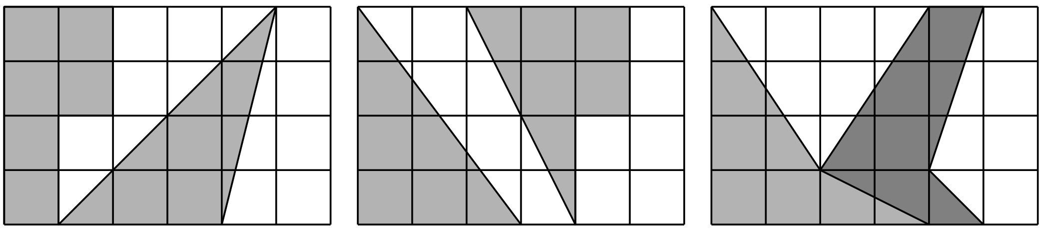


Teraz skúsime modifikovať delenie tak, aby obsahy útvarov boli rovnaké. Celý obdĺžnik pozostáva z 24 dielikov, preto každý zo štyroch útvarov musí mať obsah $24 :$ $: 4 = 6$ dielikov. Pri menení útvarov stačí zabezpečiť, aby tri z týchto útvarov mali obsah 6 dielikov, obsah štvrtého potom bude nutne taký istý.

Upresnenie vyššie uvedeného delenia môže byť nasledujúce – všetky vrcholy uvažujeme v mrežových bodoch:



Trojuholník aj štvoruholník zrejme majú obsah 6 dielikov. Obsah päťuholníka je $2+2+2=6$ dielikov. Našli sme teda jedno z mnohých možných riešení. Pre inšpiráciu uvádzame niekoľko ďalších:



Poznámka. Uvedené riešenia využívajú iba mrežové body siete, čo však nie je nutné. Existujú riešenia, kde zodpovedajúce vrcholy nie sú v mrežových bodoch. V takých prípadoch však môže byť zdôvodnenie rovnosti obsahov komplikovanejšie.

---

3. *Zmeňte v každom z troch čísel jednu cifru tak, aby bol príklad na odčítanie bez chyby:*

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 4 \\ -\ 3\ 0\ 7 \\ \hline 1\ 8\ 8 \end{array}$$

Nájdite všetky riešenia. (*Michaela Petrová*)

Nápad. Je možné odčítanie v ráde desiatok opraviť len zmenou cifier v ráde jednotiek?

Riešenie. Príklad nie je správne, a to ani v ráde jednotiek. Keď skontrolujeme odčítanie v ráde desiatok a v ráde stoviek, zistíme, že chyba je v oboch rozdieloch väčšia ako 1. To znamená, že taký rozdiel nie je možné opraviť iba zmenou cifier o rád nižšie. Ak máme spraviť tri zmeny, musí byť v každom stĺpci práve jedna. Preto stačí, keď budeme uvažovať nasledujúcich šesť možností:

$$
\begin{array}{r} 7\,2\,* \\ -\ 3\,*\,7 \\ \hline *\,8\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,2\,* \\ -\ *\,0\,7 \\ \hline 1\,*\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,*\,4 \\ -\ 3\,0\,* \\ \hline *\,8\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} *\,2\,4 \\ -\ 3\,0\,* \\ \hline 1\,*\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,*\,4 \\ -\ *\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,* \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} *\,2\,4 \\ -\ 3\,*\,7 \\ \hline 1\,8\,* \end{array}
$$

Pre každú z týchto možností postupne odzadu doplníme správne cifry. Napr. v prvom prípade môžeme postupovať nasledovne:

- správna cifra na mieste jednotiek musí byť 5, pretože jedine $1\mathbf{5} - 7 = 8$ (v ráde desiatok pripočítame 1),
- správna cifra na mieste desiatok musí byť 3, pretože jedine $12 - \mathbf{3} - 1 = 8$ (v ráde stoviek pripočítame 1),
- správna cifra na mieste stoviek musí byť 3, pretože $7 - 3 - 1 = \mathbf{3}$.

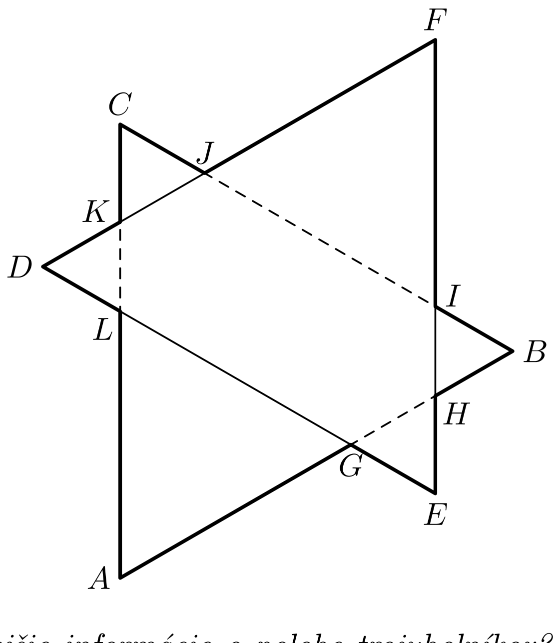
Podobným spôsobom rozoberieme ostatné možnosti. Úloha má celkom šesť riešení:

$$
\begin{array}{r} 7\,2\,\mathbf{5} \\ -\ 3\,\mathbf{3}\,7 \\ \hline \mathbf{3}\,8\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,2\,\mathbf{5} \\ -\ \mathbf{6}\,0\,7 \\ \hline 1\,\mathbf{1}\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,\mathbf{9}\,4 \\ -\ 3\,0\,\mathbf{6} \\ \hline \mathbf{4}\,8\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \mathbf{4}\,2\,4 \\ -\ 3\,0\,\mathbf{6} \\ \hline 1\,\mathbf{1}\,8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 7\,\mathbf{9}\,4 \\ -\ \mathbf{6}\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,\mathbf{7} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \mathbf{5}\,2\,4 \\ -\ 3\,\mathbf{3}\,7 \\ \hline 1\,8\,\mathbf{7} \end{array}
$$

Poznámka. Úvodný postreh nie je úplne samozrejmý, ale pri systematickom postupe by naň mal časom prísť každý. Uvedomte si, že bez tohto poznatku by diskusia musela zahŕňať celkom $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ možností.

---

4. *Trojuholníky ABC a DEF sú rovnostranné s dĺžkou strany 5 cm. Tieto trojuholníky sú položené cez seba tak, aby strany jedného trojuholníka boli rovnobežné so stranami druhého a aby prienikom týchto dvoch trojuholníkov bol šesťuholník (na obr. označený ako $GHIJKL$). Je možné určiť obvod dvanásťuholníka $AGEHBIFJCKDL$ bez toho,*



aby sme poznali presnejšie informácie o polohe trojuholníkov? Ak áno, spočítajte ho; ak nie, vysvetlite prečo. (Eva Patáková)

Nápad. Koľko je na obrázku rovnostranných trojuholníkov? Skúste ich nejako využiť.

Riešenie. Na obrázku je spolu 8 rovnostranných trojuholníkov: dva veľké (ABC, DEF) a šesť malých (LAG, GEH, HBI, IFJ, JCK, KDL). Veľké trojuholníky sú tak priamo zadané. Zdôvodnenie, že malé trojuholníky sú rovnostranné, ukážeme iba pre trojuholník LAG: Uhol pri vrchole A má veľkosť $60°$, pretože je vnútorným uhlom rovnostranného trojuholníka ABC. Priamky LG a CB sú podľa zadania rovnobežné, uhly ALG a ACB sú teda súhlasné. Oba tieto uhly majú veľkosť $60°$, pretože uhol ACB je vnútorným uhlom v rovnostrannom trojuholníku ABC. Dva z troch vnútorných uhlov v trojuholníku LAG majú veľkosť $60°$, preto je tento trojuholník rovnostranný.

Obvod dvanásťuholníka môžeme vyjadriť ako obvod dvoch veľkých trojuholníkov zmenšený o obvod šesťuholníka $GHIJKL$. Z rovnostrannosti malých trojuholníkov vyplýva, že úsečky GL a AL, KJ a KC sú po dvojiciach zhodné. Dĺžka lomenej čiary $GLKJ$ je teda rovnaká ako dĺžka úsečky AC, t. j. 5 cm. Podobne odvodíme, že aj dĺžka lomenej čiary $JIHG$ je 5 cm. Z toho poznáme obvod šesťuholníka $GHIJKL$; obvod dvanásťuholníka $AGEHBIFJCKDL$ je preto rovný

$$6 \cdot 5 - 2 \cdot 5 = 20\,(\mathrm{cm}),$$

a to bez ohľadu na vzájomnú polohu veľkých trojuholníkov, ktorá vyhovuje zadaniu.

Iné riešenie. Dvanásťuholník $AGEHBIFJCKDL$ je tvorený stranami šiestich malých trojuholníkov, pričom z každého malého trojuholníka sa takto uplatnia dve z jeho troch strán. Všetky tieto trojuholníky sú rovnostranné, preto je obvod dvanásťuholníka rovný $\frac{2}{3}$ súčtu obvodov malých trojuholníkov. Súčet obvodov šiestich malých trojuholníkov je však rovnaký ako súčet obvodov dvoch veľkých trojuholníkov; obvod dvanásťuholníka $AGEHBIFJCKDL$ je preto rovný

$$\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 20\,(\mathrm{cm}),$$

a to bez ohľadu na vzájomnú polohu veľkých trojuholníkov, ktorá vyhovuje zadaniu.

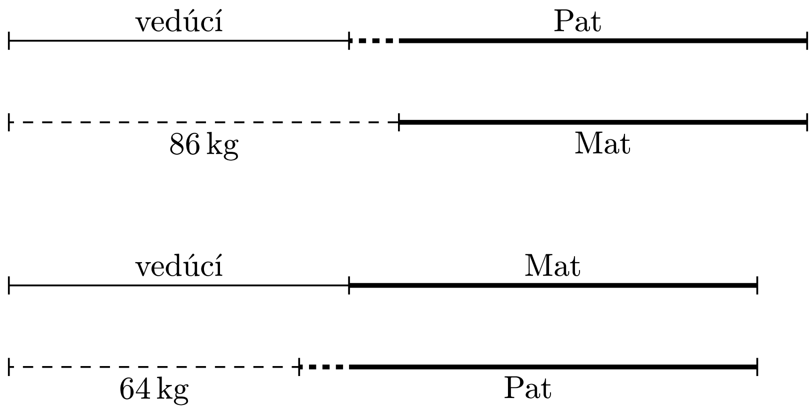
Poznámky. Predchádzajúce úvahy je možné zjednodušiť objavom, že malé trojuholníky sú po dvojiciach zhodné (LAG a IFJ, GEH a JCK, HBI a KDL). Tento poznatok je však nutné zdôvodniť, čo ukážeme pre trojuholníky LAG a IFJ: V úvode sme zdôvodnili, že oba trojuholníky sú rovnostranné. Pritom výška oboch trojuholníkov je rovnaká – je to výška rovnostranného trojuholníka so stranou 5 cm zmenšená o vzdialenosť rovnobežiek IJ a GL. Tieto trojuholníky sú teda naozaj zhodné.

---

5. *Zákazník privážajúci odpad do zberných surovín je povinný zastaviť naloženým autom na váhe a po vykládke odpadu znova. Rozdiel nameraných hmotností tak zodpovedá privezenému odpadu. Pat a Mat spravili chybu. Pri vážení naloženého auta sa na váhu priplietol Pat a pri vážení vyloženého auta sa tam namiesto Pata ocitol Mat. Vedúci zberných surovín si tak zaznamenal rozdiel 332 kg. Následne sa na prázdnu váhu postavili spolu vedúci a Pat, potom samotný Mat a váha ukázala rozdiel 86 kg. Ďalej sa spolu zvážili vedúci a Mat, potom samotný Pat a váha ukázala rozdiel 64 kg. Koľko v skutočnosti vážil privezený odpad?* (*Libor Šimůnek*)

Nápad. Skúste si hmotnosti a ich rozdiely znázorniť graficky.

Riešenie. Z rozdielov zmeraných pri vážení s vedúcim vyplýva, že Pat je ťažší ako Mat. Hmotnosti pri týchto váženiach znázorníme graficky:



Rozdiel hmotnosti Pata a Mata je zvýraznený tučnou prerušovanou čiarou. Na schéme vidíme, že dvojnásobok tohto rozdielu je rovný $86 - 64 = 22$ (kg). Pat je teda o 11 kg ťažší ako Mat. Pri vážení odpadu Pat postavením sa na váhu zväčšil meraný rozdiel, Mat ho postavením sa na váhu zmenšil. Nameraná hodnota je teda o toľko väčšia ako hmotnosť odpadu, o koľko je Pat ťažší ako Mat. Skutočná hmotnosť odpadu je $332 - 11 = 321$ (kg).

Iné riešenie. Hmotnosti Pata, Mata, vedúceho a odpadu označme postupne p, m, v, x. Pri prvom vážení bolo na váhe auto, odpad a Pat, pri druhom vážení auto a Mat. Rozdiel zmeraných hmotností môžeme teda vyjadriť:

$$x + p - m = 332. \tag{1}$$

Ďalšie dva rozdiely zmeraných hmotností vyjadríme podobne:

$$v + p - m = 86, \tag{2}$$
$$v + m - p = 64. \tag{3}$$

Odčítaním rovníc (2) a (3) dostaneme:

$$\begin{aligned} 2(p - m) &= 86 - 64, \\ p - m &= 11. \end{aligned}$$

Dosadením tohto rozdielu do rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} x + 11 &= 332, \\ x &= 321. \end{aligned}$$

Hmotnosť vyvezeného odpadu je 321 kg.

Poznámka. Všimnite si, že hmotnosť vedúceho sa dá určiť na rozdiel od hmotnosti Pata či Mata jednoznačne: napr. sčítaním rovníc (2) a (3) dostaneme $2v = 86 + 64 = 150$, teda $v = 75$ (kg).

6. *V dome máme medzi dvoma poschodiami dve rôzne schodiská. Na každom z týchto schodísk sú všetky schody rovnako vysoké. Jedno zo schodísk má každý schod vysoký 10 cm, druhé má o 11 schodov menej ako to prvé. Behom dňa som išiel päťkrát nahor a päťkrát nadol, pričom som si medzi týmito dvoma schodiskami vyberal náhodne. Celkom som na každom zo schodísk zdolal rovnaký počet schodov. Aký je výškový rozdiel medzi poschodiami?* (*Martin Mach*)

Nápad. Najskôr určte, koľkokrát som mohol ísť po jednotlivých schodiskách.

Riešenie. Keďže druhé schodisko má menej schodov ako prvé, musel som po ňom ísť viackrát ako po prvom. Behom dňa som teda po schodiskách mohol ísť takto:

- 1-krát po prvom a 9-krát po druhom,
- 2-krát po prvom a 8-krát po druhom,
- 3-krát po prvom a 7-krát po druhom,
- 4-krát po prvom a 6-krát po druhom.

Označíme počet schodov na prvom schodisku x, na druhom schodisku ich je $x - 11$. Na každom zo schodísk som spolu zdolal rovnaký počet schodov. Táto podmienka dáva pre každú z vyššie uvedených možností rovnicu s neznámou x, ktorú vyriešime. V prvom prípade dostávame:

$$\begin{aligned} x &= 9x - 99, \\ 8x &= 99, \\ x &= \frac{99}{8}. \end{aligned}$$

Počet schodov je prirodzené číslo, takže tento prípad nastať nemohol. V druhom prípade dostávame rovnicu

$$2x = 8x - 88,$$

ktorej riešením je $x = \frac{88}{6}$, takže táto možnosť tiež nevyhovuje. V treťom prípade dostávame

$$3x = 7x - 77,$$

s riešením $x = \frac{77}{4}$, čo je opäť nevyhovujúce. V štvrtom prípade dostávame

$$4x = 6x - 66,$$

s riešením $x = \frac{66}{2} = 33$, čo je jediná vyhovujúca možnosť.

Prvé schodisko má 33 schodov, každý schod je vysoký 10 cm, výškový rozdiel medzi poschodiami je 3,3 m.

Poznámka. Pokiaľ uvažujeme, že po prvom schodisku som išiel behom dňa spolu a-krát a po druhom spolu b-krát, tak predchádzajúce požiadavky môžeme formulovať takto:

$$a + b = 10 \text{ a } ax = bx - 11b.$$

Z druhej rovnice vyjadríme x:

$$x = \frac{11b}{b - a}.$$

Aby x bolo kladné, musí byť $b > a$, čo spolu s podmienkou $a + b = 10$ dáva práve štyri možnosti uvedené vyššie. Aby x bolo prirodzené číslo, musí byť $11b$ deliteľné $b - a$. Keďže 11 je prvočíslo a $b - a$ nemôže byť ani 11, ani 1, musí byť b deliteľné $b - a$. Z uvedených štyroch možností tejto podmienke vyhovuje iba dvojica $a = 4$ a $b = 6$.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013