**63. ročník Matematickej olympiády**
**2013/2014** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

**1.** *Na lavičke v parku sedia vedľa seba Anička, Barborka, Cilka, Dominik a Edo. Anička má 4 roky, Edo má 10 rokov, súčin vekov Aničky, Barborky a Cilky je* 140*, súčin vekov Barborky, Cilky a Dominika je* 280 *a súčin vekov Cilky, Dominika a Eda je* 560*. Koľko rokov má Cilka?* (*Libuše Hozová*)

**Nápad.** Skúste najskôr určiť, koľko rokov má Dominik.

**Riešenie.** Pre zjednodušenie budeme vek každého dieťaťa označovať malým začiatočným písmenom jeho mena. Podľa zadania platí:

$$a = 4,\ abc = 140,\ bcd = 280,\ cde = 560,\ e = 10.$$

Z druhej a tretej rovnosti vyplýva, že $2abc = bcd$, tzn. $d = 2a = 8$. Odtiaľ a z posledných dvoch rovností dostávame $c = 560 : (8 \cdot 10) = 7$. Cilka teda má 7 rokov.

*Poznámka.* S uvedenými vzťahmi sa dá samozrejme manipulovať rôzne. Napr. z prvej a druhej rovnosti vyplýva, že $bc = 140 : 4 = 35$. Z tretej rovnosti potom vyplýva, že $d = 280 : 35 = 8$. Odtiaľ a z posledných dvoch rovností dostávame $c = 560 : (8 \cdot 10) = 7$.

---

**2.** *K starej mame prišli na prázdniny vnuci – päť rôzne starých bratov. Stará mama im povedala, že pre nich má celkom 60 € ako vreckové, ktoré si majú rozdeliť tak, aby:*

- *najstarší dostal najviac,*
- *každý mladší dostal o určitú čiastku menej ako jeho starší vekom najbližší súrodenec,*
- *táto čiastka bola stále rovnaká,*
- *najmladší dostal sumu, ktorá sa dá vyplatiť v jednoeurovkách a ktorá nie je menšia ako 5 €, ale nie je väčšia ako 8 €.*

*Určte všetky možnosti, ako si mohli vnuci vreckové rozdeliť.* (*Marta Volfová*)

**Nápad.** Zvoľte vhodne neznáme a pomocou nich vyjadrite sumy pre jednotlivých vnukov.

**Riešenie.** Najmladší súrodenec môže dostať

$$5,\ 6,\ 7,\ \text{alebo } 8; \tag{1}$$

túto hodnotu označíme $p$ (€ písať nebudeme). Druhý najmladší súrodenec dostane viac ako najmladší o čiastku, ktorú označíme $o$. Prostredný súrodenec tak dostane o $2o$ viac ako najmladší atď. To znamená, že súrodenci postupne dostanú

$$p,\ p + o,\ p + 2o,\ p + 3o,\ p + 4o. \tag{2}$$

Celkom si takto rozdelia $5p + 10o$, čo má byť 60.

Ak $p = 5$, tak $5p = 25$ a $10o$ musí byť $60 - 25 = 35$. Z toho vyplýva, že $o = 3{,}50$. Vnuci si v tomto prípade peniaze rozdelili nasledovne (v poradí od najmladšieho):

$$5,\quad 8{,}50,\quad 12,\quad 15{,}50,\quad 19.$$

Podobne sa dajú určiť všetky zvyšné možnosti:

| $p$ | $o$ | odpoveď | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3,50 | 5, | 8,50, | 12, | 15,50, | 19 |
| 6 | 3 | 6, | 9, | 12, | 15, | 18 |
| 7 | 2,50 | 7, | 9,50, | 12, | 14,50, | 17 |
| 8 | 2 | 8, | 10, | 12, | 14, | 16 |

*Poznámka.* Nie je náhoda, že prostredný súrodenec dostane v každom prípade rovnakú sumu. To si možno všimnúť hneď na začiatku, pretože súrodencov je nepárny počet a rozdiel medzi susednými sumami je stále rovnaký.

Ak by sme sumu, ktorú má dostať prostredný vnuk, označili $s$, tak namiesto (2) píšeme

$$s-2o,\ s-o,\ s,\ s+o,\ s+2o.$$

Súčet všetkých týchto súm je $5s$, a to má byť 60. Z toho vyplýva, že $s=12$. Všetky možné rozdelenia vreckového sa dajú určiť tak, že zistíme, pre ktoré $o$ je $12-2o$ niektoré z čísel (1).

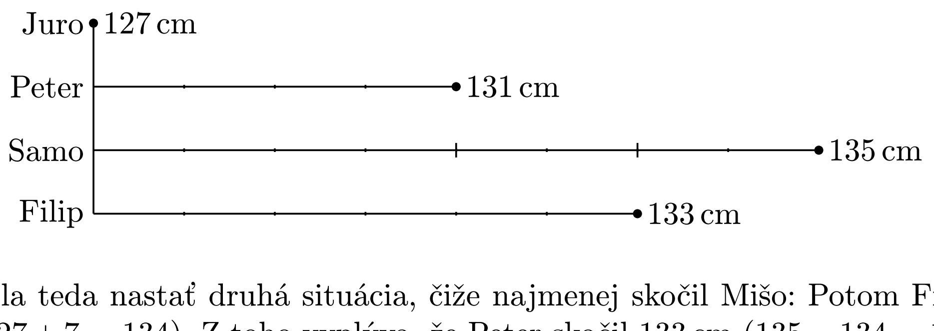
---

**3.** *Juro, Mišo, Peter, Filip a Samo skákali do diaľky. Samo skočil 135 cm, Peter skočil o 4 cm viac ako Juro a Mišo o 7 cm menej ako Filip. Navyše Filipov skok bol presne v polovici medzi tým Petrovým a Samovým a najkratší skok meral 127 cm. Zistite, koľko cm skočili jednotliví chlapci.* (*Monika Dillingerová*)

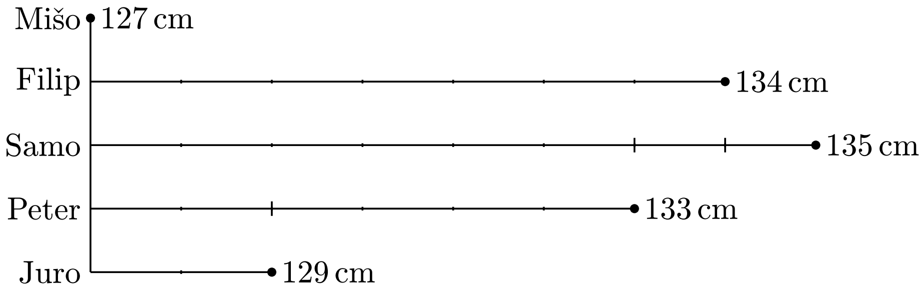
**Nápad.** Koho skok bol najkratší?

**Riešenie.** Najskôr určíme, koho skok meral 127 cm. Určite to nebol skok Samov (ten skočil 135 cm), ani Petrov (skočil viac ako Juro), ani Filipov (skočil viac ako Mišo). Sú teda dve možnosti: Najmenej skočil Juro alebo Mišo.

Najskôr preveríme možnosť, že najmenej skočil Juro: V takom prípade by Peter skočil 131 cm ($127+4=131$). Keďže Filipov skok bol presne v polovici medzi Petrovým a Samovým skokom, musel by merať 133 cm ($135-133=133-131=2$). Potom by Mišo skočil 126 cm ($133-7=126$), čo ale nie je možné, pretože by to bolo menej ako Jurov najkratší skok.




Musela teda nastať druhá situácia, čiže najmenej skočil Mišo: Potom Filip skočil 134 cm ($127+7=134$). Z toho vyplýva, že Peter skočil 133 cm ($135-134=1=134-$ $-133$). A napokon Juro skočil 129 cm ($133-4=129$).




**4.** *V hostinci U troch prasiatok obsluhujú Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hosťovi pripočíta k celkovej cene 6 grajciarov. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje presne to, čo zjedol a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hosťovi dá zľavu z celkovej ceny vo výške 20 %. Prasiatka sa na seba tak podobajú, že žiadny hosť nepozná, ktoré práve obsluhuje. Koza Lujza zašla v pondelok, v utorok aj v stredu do tohto hostinca na čučoriedkovú buchtu. Napriek tomu, že vedela, že v pondelok bol Rašík chorý a neobsluhoval, utratila za svoju pondelkovú, utorkovú aj stredajšiu buchtu dokopy rovnako, ako keby ju vždy obsluhoval Rašík. Koľko grajciarov účtuje Rašík za jednu čučoriedkovú buchtu? Nájdite všetky možnosti. (Ceny uvádzané v jedálnom lístku sa v tieto dni nemenili.)* (*Michaela Petrová*)

**Nápad.** Ktoré dve prasiatka určite kozu Lujzu obsluhovali?

**Riešenie.** Aby celková trojdňová Lujzina útrata bola rovnaká, musel niektorý deň obsluhovať Sašík (účtoval si menej, ako naozaj mala zaplatiť) a niektorý deň Pašík (účtoval si viac, ako naozaj mala zaplatiť). Zvyšný tretí deň mohlo obsluhovať ktorékoľvek z troch prasiatok (nevieme o tom, že by Rašík bol chorý aj v ďalších dňoch). Postupne rozoberieme všetky tri možnosti:

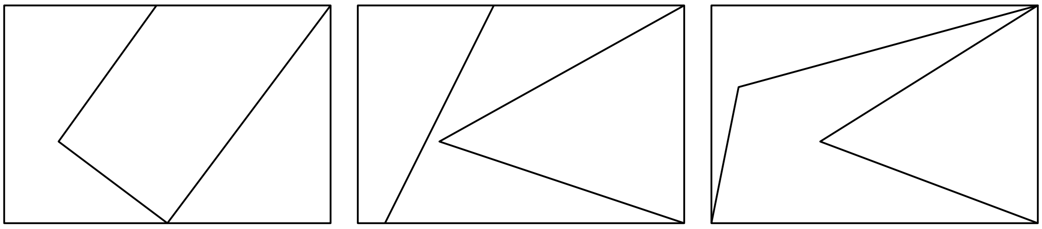
1. Obsluhoval raz Sašík, raz Pašík a raz Rašík: To znamená, že 6 grajciarov, ktoré Lujza zaplatila Pašíkovi navyše, predstavuje zľavu 20 %, ktorú dostala od Sašíka. Pätina ceny buchty je teda 6 grajciarov, čo znamená, že Rašík by v tomto prípade účtoval $5 \cdot 6 = 30$ grajciarov.
2. Obsluhoval raz Sašík a dvakrát Pašík: Pašíkovi Lujza zaplatila navyše $2 \cdot 6 = 12$ grajciarov. Týchto 12 grajciarov je zároveň 20 % zľava, ktorú dostala od Sašíka. Rašík by teda za buchtu v tomto prípade účtoval $5 \cdot 12 = 60$ grajciarov.
3. Obsluhoval dvakrát Sašík a raz Pašík: Lujza dostala dvakrát 20 % zľavu z rovnakej sumy. To je rovnaké, ako keby raz zaplatila plnú čiastku a raz dostala zľavu 40 %. Táto zľava zodpovedá 6 grajciarom, ktoré zaplatila navyše Pašíkovi. Dve pätiny Rašíkovej ceny sú 6 grajciarov, pätina je teda 3 grajciare. Rašík by si v tomto prípade účtoval $5 \cdot 3 = 15$ grajciarov.

   Rašík za jednu čučoriedkovú buchtu účtuje 15, 30, alebo 60 grajciarov.

**5.** *Mamička delí čokoládu, ktorá má* $6 \times 4$ *rovnakých dielikov, svojim trom deťom. Ako môže mamička čokoládu rozdeliť na práve tri časti s rovnakým obsahom tak, aby jeden útvar bol trojuholník, jeden štvoruholník a jeden päťuholník?* (*Erika Novotná*)

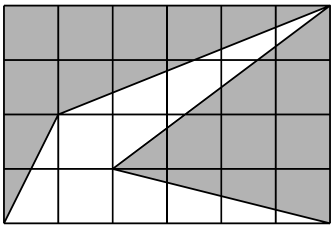
**Nápad.** Skúste najskôr rozdeliť obdĺžnik na požadované útvary bez podmienky rovnosti obsahov. Potom pozmeňte svoje delenie tak, aby obsahy útvarov boli rovnaké.

**Riešenie.** Rozdelíme obdĺžnik na požadované útvary, zatiaľ bez ohľadu na rovnosť obsahov. Tu je niekoľko možností:

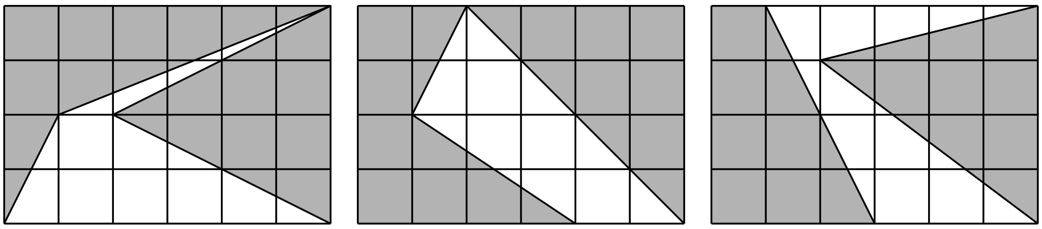


Teraz skúsime modifikovať delenie tak, aby obsahy útvarov boli rovnaké. Celý obdĺžnik pozostáva z 24 dielikov, preto každý z troch útvarov musí mať obsah 24 : 3 = = 8 dielikov. Pri menení útvarov stačí zabezpečiť, aby dva z týchto útvarov mali obsah 8 dielikov, obsah tretieho potom bude nutne taký istý.

Pre ukážku upresníme tretie z vyššie uvedených delení – všetky vrcholy uvažujeme v mrežových bodoch:



Obsah štvoruholníka je práve $1 + 2 + 5 = 8$ dielikov. Trojuholník má zrejme taký istý obsah, našli sme teda jedno z mnohých možných riešení. Pre inšpiráciu uvádzame niekoľko ďalších:



*Poznámka.* Uvedené riešenia využívajú iba mrežové body siete, čo však nie je nutné. Existujú samozrejme riešenia, kde zodpovedajúce vrcholy nie sú v mrežových bodoch. V takých prípadoch však môže byť zdôvodnenie rovnosti obsahov komplikovanejšie.

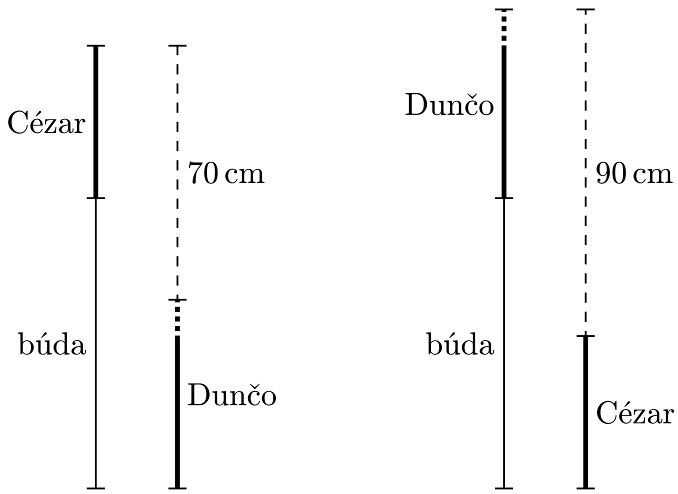
---

**6.** *Keď Cézar stojí na psej búde a Dunčo na zemi, je Cézar o 70 cm vyšší ako Dunčo. Keď Dunčo stojí na psej búde a Cézar na zemi, je Dunčo o 90 cm vyšší ako Cézar. Aká vysoká je psia búda?* (*Libuše Hozová*)

**Nápad.** Určte, ktorý zo psov je vyšší a o koľko.

**Riešenie.** Keby bol Cézar rovnako vysoký ako Dunčo, boli by obe hodnoty v zadaní rovnaké. Rozdiel medzi nameranými hodnotami je $90 - 70 = 20$ (cm), čo znamená, že jeden zo psov je o 10 cm vyšší ako druhý. Väčšia hodnota zodpovedá situácii, keď Dunčo stojí na búde, čo znamená, že Dunčo je o 10 cm vyšší ako Cézar.

Cézar na psej búde je o 70 cm vyšší ako Dunčo a Dunčo je o 10 cm vyšší ako Cézar. Teda Cézar na psej búde je o 80 cm vyšší ako samotný Cézar; búda je vysoká 80 cm.




**Iné riešenie.** Cézar na búde je o 70 cm vyšší ako Dunčo na zemi a Dunčo na búde je o 90 cm vyšší ako Cézar na zemi. Keby sme na Cézara stojaceho na búde postavili ešte ďalšiu rovnako vysokú búdu a na ňu Dunča, bude táto zostava o $70 + 90 = 160$ (cm) vyššia ako keby stál Cézar na Dunčovi. To znamená, že dve búdy sú vysoké 160 cm, búda je teda vysoká 80 cm.

*Poznámka.* Výšku psej búdy označíme $b$, výšku Cézara označíme $c$ a výšku Dunča označíme $d$ (všetko v cm). Informácie zo zadania pri tomto označení zapíšeme takto:

$$b + c = d + 70,$$
$$b + d = c + 90.$$

Uvedené riešenie potom možno interpretovať nasledovne.

Výškový rozdiel Dunča a Cézara je možné určiť odčítaním oboch rovníc:

$$d - c = c - d + 20,$$
$$2(d - c) = 20,$$
$$d - c = 10.$$

Z toho vyplýva, že $d = c + 10$ a z prvej rovnice potom dostávame $b = 10 + 70 = 80$.

Naopak sčítaním oboch rovníc dostaneme:

$$2b + c + d = c + d + 160,$$
$$2b = 160,$$
$$b = 80.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013