

63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1. V továrni na výrobu plyšových hračiek majú dva stroje. Prvý vyrobí štyroch zajacov za rovnaký čas, za ktorý vyrobí druhý päť medvedov. Aby bolo ich ovládanie jednoduchšie, oba stroje sa spúšťajú a vypínajú naraz spoločným vypínačom. Navyše sú stroje nastavené tak, že prvý po spustení najskôr vyrobí troch ružových zajacov, potom jedného modrého, potom zasa troch ružových atď. Druhý po spustení najskôr vyrobí štyroch modrých medvedov, potom jedného ružového, potom opäť štyroch modrých atď. Po istom čase bolo na týchto dvoch strojoch vyrobených celkom 220 modrých hračiek. Koľko bolo vtedy vyrobených ružových zajacov? (Michaela Petrová)

Nápad. Zistite, koľko je vyrobených modrých hračiek v momente, keď prvý stroj dokončí štvrtého zajaca.

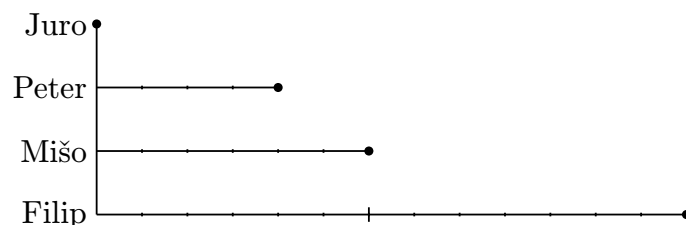
Riešenie. Dobe, za ktorú prvý stroj vyrobí 4 hračky a druhý stroj 5 hračiek, budeme hovoriť „cyklus“. Behom jedného cyklu sa teda vyrobia: 3 ružové zajace, 1 modrý zajac, 4 modré medvede a 1 ružový medveď, t. j. celkom 4 ružové a 5 modrých hračiek.

To znamená, že 220 modrých hračiek sa vyrobí za $220 : 5 = 44$ úplných cyklov. Keďže za jeden cyklus prvý stroj vyrobí 3 ružové zajace, za 44 cyklov vyrobí $44 \cdot 3 = 132$ ružových zajacov. V každom cykle sa najskôr vyrábajú ružové zajace a až potom modré. Preto v okamihu, keď oba stroje vyrobili 220 modrých hračiek, bolo na prvom stroji vyrobených 132 ružových zajacov.

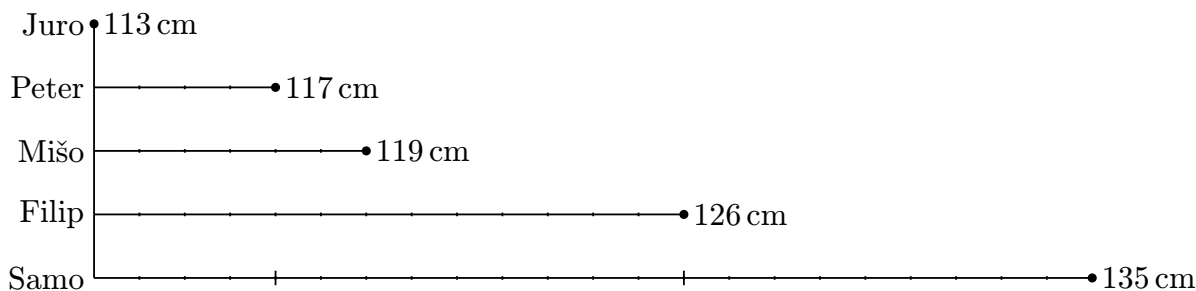
2. Juro, Mišo, Peter, Filip a Samo skákali do diaľky. Samo skočil 135 cm, Peter skočil o 4 cm viac ako Juro, Juro o 6 cm menej ako Mišo a Mišo o 7 cm menej ako Filip. Navyše Filipov skok bol presne v polovici medzi Petrovým a Samovým. Zistite, koľko cm skočili jednotliví chlapci. (Monika Dillingerová)

Nápad. Porovnajzte dĺžky Jurovho, Mišovho, Petrovho a Filipovho skoku.

Riešenie. Zatiaľ neuvažujme Samov skok a dĺžky skokov ostatných chlapcov zoradíme od najkratšieho po najdlhší. Zo zadania je zrejmé, že najmenej skočil Juro: Peter skočil o 4 cm viac ako Juro, Mišo skočil o 6 cm viac ako Juro, Filip skočil o 7 cm viac ako Mišo, teda o 13 cm viac ako Juro.



Keďže Filipov skok má byť presne v polovici medzi Petrovým a Samovým a keďže Peter skočil menej ako Filip, musel Samo skočiť najviac zo všetkých chlapcov. A keďže Filip skočil o 9 cm viac ako Peter ($13 - 4 = 9$), musel zároveň skočiť o 9 cm menej ako Samo. Z toho určíme, že Filip skočil 126 cm ($135 - 9 = 126$), Juro skočil 113 cm ($126 - 13 = 113$), Peter skočil 117 cm ($113 + 4 = 117$) a Mišo skočil 119 cm ($113 + 6 = 119$).



3. Koľko musíme napísať cifier, ak chceme vypísať všetky prirodzené čísla od 1 do 2013?
(Marta Volfová)

Nápad. Počítajte systematicky.

Riešenie. Musíme napísať všetky jedno-, dvoj- a trojciferné čísla a časť štvorciferných čísel. Postupne počítame počty napísaných čísel a cifier:

napísané čísla	počet čísel	počet cifier
1, ..., 9	9	9
10, ..., 99	90	180
100, ..., 999	900	2 700
1 000, ..., 2 013	1 014	4 056
celkom	2 013	6 945

Na zapísanie čísel od 1 do 2013 treba 6 945 cifier.

4. Správne vyplnená tabuľka na obr. má obsahovať šesť prirodzených čísel, pričom v každom sivom políčku má byť súčet čísel z dvoch bielych políčok, ktoré s ním susedia.

--	--	--	--	--	--

Určte čísla správne vyplnenej tabuľky, ak viete, že súčet prvých dvoch čísel zľava je 33, súčet prvých dvoch čísel sprava je 28 a súčet všetkých šiestich čísel je 64.

(Libor Šimůnek)

Nápad. Aký súčet dáva tretie a štvrté číslo?

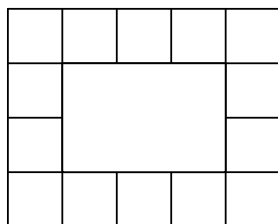
Riešenie. Súčet tretieho a štvrtého prirodzeného čísla je $64 - 33 - 28 = 3$, sú to teda čísla 1 a 2. Najskôr predpokladajme, že číslo 1 je na tretej pozícii a číslo 2 na štvrtej. Na prvej pozícii by potom bolo $(33 - 1) : 2 = 16$ a na šiestej $(28 - 2) : 2 = 13$.

Ešte preverme možnosť, že číslo 1 je na štvrtej pozícii a číslo 2 na tretej. Na prvej pozícii by potom muselo byť $(33 - 2) : 2 = 15,5$, čo nepripúšťa zadanie, lebo v tabuľke majú byť prirodzené čísla. Tabuľku môžeme teda vyplniť jediným spôsobom:

16	17	1	2	15	13
----	----	---	---	----	----

5. Adam dostal od deda drevené kocky. Všetky boli rovnaké a mali hranu dlhú 4 cm. Rozhodol sa, že z nich bude stavať komíny, a to také:

- aby boli použité všetky kocky,
- aby komín pri pohľade zhora vyzeral ako „dutý obdĺžnik“ alebo „dutý štvorec“ ohraničený jedným radom kociek (podobne ako na obr.),
- aby ani v najvyššej vrstve žiadna kocka nechýbala.



Adam zistil, že komín vysoký 16 cm, 20 cm aj 24 cm sa podľa týchto pravidiel určite dá z jeho kociek postaviť.

1. Aký najmenší počet kociek mohol Adam dostať od deda?
2. Aký vysoký je najvyšší komín, ktorý môže Adam s týmto najmenším počtom kociek postaviť podľa uvedených pravidiel?

(Michaela Petrová)

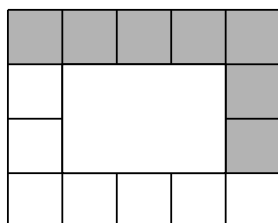
Nápad. Rozhodnite, či mohol Adam dostať napríklad 100 kociek.

Riešenie. Najskôr spočítame, koľko vrstiev mali jednotlivé Adamove komíny:

1. komín: $16 : 4 = 4$,
2. komín: $20 : 4 = 5$,
3. komín: $24 : 4 = 6$.

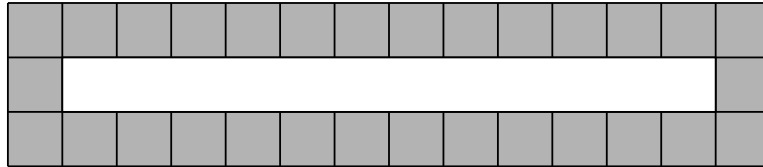
Keďže všetky vrstvy boli úplné, musí byť počet kociek deliteľný štyrmi, piatimi a šiestimi súčasne. Najmenší spoločný násobok týchto troch čísel je 60, počet kociek preto musí byť nejakým násobkom šesťdesiatich. Overíme, či mohol Adam dostať 60 kociek:

1. komín má 4 vrstvy, čo by znamenalo 15 kociek v jednej vrstve ($60 : 4 = 15$). To ale nie je možné, pretože v každej vrstve je párny počet kociek („had“ z kociek sa dá vždy rozdeliť na 2 rovnaké časti, pozri obrázok).

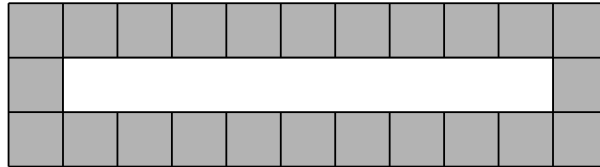


Adam teda dostal viac ako 60 kociek; ďalšia možnosť je $2 \cdot 60 = 120$:

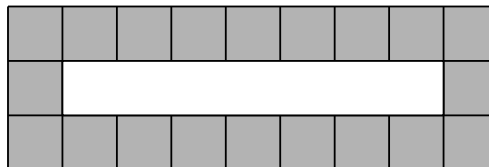
1. komín má 4 vrstvy, tzn. 30 kociek v jednej vrstve ($120 : 4 = 30$). To sa dá splniť napr. takto:



2. komín má 5 vrstiev, tzn. 24 kociek v jednej vrstve ($120 : 5 = 24$). To sa dá splniť napr. takto:

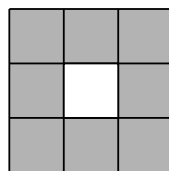


3. komín má 6 vrstiev, tzn. 20 kociek v jednej vrstve ($120 : 6 = 20$). To sa dá splniť napr. takto:



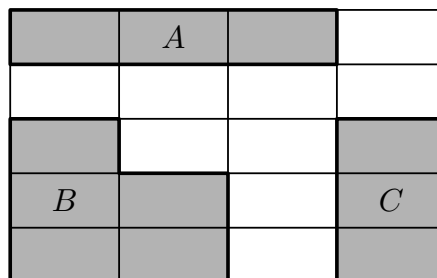
Tým sme dokázali, že najmenší počet kociek, ktorý mohol Adam dostať, je 120.

Teraz ešte zistíme výšku najvyššieho komína, ktorý sa dá zo 120 kociek postaviť podľa Adamových pravidiel. Na jednu vrstvu potrebujeme najmenej 8 kociek:



V takom prípade bude mať komín 15 úplných vrstiev ($120 : 8 = 15$). Kocky sú vysoké 4 cm, takže najvyšší komín, ktorý sa dá postaviť zo 120 kociek, meria 60 cm ($15 \cdot 4 = 60$).

6. Na obr. je sieť zložená z 20 zhodných obdĺžnikov, do ktorej sme zakreslili tri útvary a vyfarbili ich. Obdĺžnik označený písmenom *A* a šesťuholník označený písmenom *B* majú zhodné obvody, a to 56 cm. Vypočítajte obvod tretieho útvaru označeného písmenom *C*.
(Libor Šimůnek)



Nápad. Určte, o koľko vodorovných a o koľko zvislých dielikov sa líšia obvody útvarov A a B .

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnikov, z ktorých sa skladá sieť, označme x a y (x pre vodorovnú stranu a y pre zvislú). Obvod útvaru A je rovný $6x + 2y$, obvod útvaru B je $4x + 6y$ a obvod útvaru C je $2x + 6y$.

V obvode útvaru A sú započítané o 2 dĺžky x viac a o 4 dĺžky y menej ako v obvode útvaru B . Obvody A a B sú podľa zadania rovnaké, teda $2x$ je rovné $4y$. Z toho vidíme, že x je dvakrát väčšie ako y , teda že $x = 2y$. Obvod útvaru A tak môžeme vyjadriť ako $14y$, odtiaľ $y = 56 : 14 = 4$ (cm). Obvod útvaru C je $10y = 10 \cdot 4 = 40$ (cm).

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013