63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014

Riešenia úloh krajského kola kategórie B

---

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x^2+6(y+z)&=85,\\ y^2+6(z+x)&=85,\\ z^2+6(x+y)&=85. \end{aligned}$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Odčítaním druhej rovnice od prvej a tretej od druhej dostaneme dve rovnice

$$\begin{aligned} (x-y)(x+y-6)&=0,\\ (y-z)(y+z-6)&=0, \end{aligned}$$

ktoré spolu s ľubovoľnou z troch daných rovníc tvoria sústavu s danou sústavou ekvivalentnú. Pre splnenie získaných dvoch rovníc pritom máme štyri možnosti:

Ak $x=y=z$, vyjde dosadením do ktorejkoľvek zo zadaných rovníc $y^2+12y-85=0$ a odtiaľ $y=5$ alebo $y=-17$.

Ak $x=y$, $z=6-y$, dostaneme z prvej zadanej rovnice $y^2+36=85$, a teda $y=7$ alebo $y=-7$.

Ak $x=6-y$, $z=y$, dostaneme z poslednej zadanej rovnice opäť $y^2+36=85$, a teda $y=7$ alebo $y=-7$.

Ak $x=z=6-y$, dostaneme z druhej zadanej rovnice $y^2+6(12-2y)=85$ čiže $y^2-12y-13=0$ a odtiaľ $y=-1$ alebo $y=13$.

Odpoveď. Sústava rovníc má osem riešení, a to $(5,5,5)$, $(-17,-17,-17)$, $(7,7,-1)$, $(-7,-7,13)$, $(-1,7,7)$, $(13,-7,-7)$, $(7,-1,7)$, $(-7,13,-7)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uhádnutie riešenia $x=y=z\in\{5,-17\}$ dajte 2 body, alebo len 1 bod, keď riešiteľ nájde iba jedno z týchto riešení. Rozobranie ostatných dvoch možností odmeňte dokopy 2 bodmi (je to rovnaká kvadratická rovnica) a poslednú možnosť $x=z=6-y$ ohodnoťte tiež dvoma bodmi. Ak študent rozoberie všetky štyri prípady, ale zabudne na riešenia, ktoré vzniknú zámenou poradia, dajte iba 5 bodov.

---

2. *Janko napísal na tabuľu niekoľko rôznych prvočísel (aspoň tri). Keď sčítal ľubovoľné dve z nich a tento súčet zmenšil o 7, bolo výsledné číslo medzi napísanými. Ktoré čísla mohli na tabuli byť?* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme prvočísla napísané na tabuli ako $p_1<p_2<\dots<p_k$. Z týchto čísel je vďaka predpokladu $k\geqq 3$ možné vytvoriť k rôznych čísel

$$p_1+p_2-7<p_1+p_3-7<\dots<p_1+p_k-7<p_{k-1}+p_k-7, \tag{1}$$

ktoré všetky musia byť medzi číslami napísanými na tabuli. Preto sa postupne rovnajú prvočíslam $p_1<p_2<\dots<p_k$. Presnejšie, najmenšie z nich sa rovná p_1, t. j. $p_1+p_2-7=p_1$, a teda $p_2=7$. Následne pre druhé najmenšie číslo v nerovniciach (1) platí $p_1+p_3-7=p_2=7$, a teda $p_1+p_3=14$. Pre prvočíslo $p_1<p_2=7$ máme iba tri možnosti $p_1\in\{2,3,5\}$, ktorým zodpovedajú hodnoty $p_3=14-p_1\in\{12,11,9\}$,

z ktorých iba $p_3 = 11$ je prvočíslo, takže $p_1 = 3$. Predpokladajme, že na tabuli je napísané ešte ďalšie prvočíslo p_4. Potom tretie najmenšie číslo v nerovniciach (1) musí byť $11 = p_3 = p_1 + p_4 - 7$, z čoho vzhľadom na rovnosť $p_1 = 3$ vyplýva $p_4 = 15$, čo prvočíslo nie je.

Odpoveď. Na tabuli mohli byť iba tri prvočísla 3, 7 a 11.

Dodajme, že záver $k = 3$ sa dá inak zdôvodniť poznámkou, že rovnakú k-ticu prvočísel v skupine (1) musíme dostať aj vtedy, keď zameníme posledné z čísel za $p_2 + p_k - 7$; musí teda platiť $p_{k-1} = p_2$ čiže $k = 3$.

Iné riešenie. Označme prvočísla napísané na tabuli ako $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Ak si Janko vyberie dve najmenšie a dve najväčšie prvočísla, ich súčet zmenšený o 7 je na tabuli, a preto $p_1 + p_2 - 7 \geqq p_1$ a $p_k + p_{k-1} - 7 \leqq p_k$, z čoho vyplýva $7 \leqq p_2 < p_{k-1} \leqq 7$. Aby sme nedostali spor, musí byť $k \leqq 3$. Podľa zadania sú na tabuli aspoň tri prvočísla, teda na tabuli sú presne tri prvočísla $p_1 < p_2 < p_3$. Keďže $p_1 + p_2 < p_1 + p_3 < p_2 + p_3$, musí platiť

$$p_1 + p_2 - 7 = p_1, \qquad p_1 + p_3 - 7 = p_2, \qquad p_2 + p_3 - 7 = p_3.$$

Z prvej (a poslednej) rovnice vychádza $p_2 = 7$ a z prostrednej $p_1 + p_3 = 14$, pričom $p_1 < 7 = p_2$. Vyskúšaním všetkých možností $p_1 \in \{2, 3, 5\}$ dostaneme jediné riešenie $p_1 = 3$ a $p_3 = 11$.

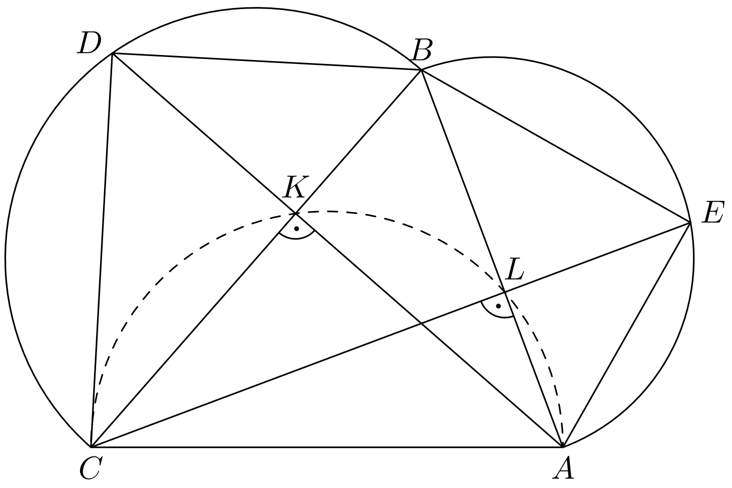
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, len za vyriešenie situácie s tromi prvočíslami dajte 3 body. Ďalšie 3 body dajte, ak študent preukáže, že na tabuli mohli byť nanajvýš 3 prvočísla. Za uhádnutie riešenia $\{3, 7, 11\}$ dajte 2 body.

---

3. *Nad stranami BC a AB ostrouhlého trojuholníka ABC sú zvonka zostrojené polkružnice k a l. Označme postupne D a E priesečníky výšok z vrcholov A a C s polkružnicami k a l (výškami rozumieme priamky). Dokážte, že platí $|BE| = |BD|$.*

(*Veronika Hucíková*)

Riešenie. Označme päty výšok z vrcholov A a C na strany daného trojuholníka postupne K a L (obr. 1). Z Euklidovej vety o odvesne v pravouhlom trojuholníku BCD vieme, že $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC|$. Podobne pre pravouhlý trojuholník ABE máme $|BE|^2 = |BL| \cdot |BA|$. Trojuholníky ACK a ACL sú pravouhlé s preponou AC, a preto body K a L ležia na kružnici s priemerom AC. Mocnosť bodu B k tejto kružnici je $|BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA|$, a tak spojením s dôsledkami Euklidových viet dostávame $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA| = |BE|^2$, a teda $|BE| = |BD|$.



Obr. 1

Iné riešenie. Pri označení piat výšok ako v prvom riešení (obr. 1) z Pytagorových viet v trojuholníkoch BAK, BDK, CAK a CDK dostaneme

$$\begin{aligned}|BD|^2 - |BA|^2 &= (|DK|^2 + |BK|^2) - (|AK|^2 + |BK|^2) = |DK|^2 - |AK|^2 = \\ &= (|DK|^2 + |CK|^2) - (|AK|^2 + |CK|^2) = |CD|^2 - |CA|^2.\end{aligned}$$

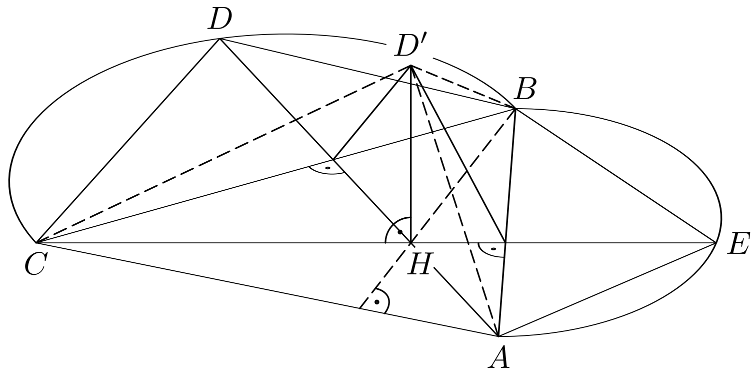
Navyše z pravouhlého trojuholníka BCD vieme, že $|CD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$. Dosadením do predchádzajúcej rovnosti po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}|BD|^2 &= |BA|^2 + |CD|^2 - |CA|^2 = |BA|^2 + (|BC|^2 - |BD|^2) - |CA|^2, \\ 2|BD|^2 &= |BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2, \\ |BD| &= \sqrt{\frac{|BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Veľkosť $|BE|$ dostaneme zo symetrie zámenou bodov $C \leftrightarrow A$ a $D \leftrightarrow E$, takže

$$|BE| = \sqrt{\frac{|BC|^2 + |BA|^2 - |AC|^2}{2}} = |BD|.$$

Iné riešenie. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC. Otočme trojuholník BCD v priestore okolo priamky BC do polohy BCD' tak, aby rovina BHD' bola kolmá na rovinu ABC, teda tak, aby kolmý priemet priamky BD' do roviny ABC splýval s výškou z vrcholu B v trojuholníku ABC (obr. 2). Keďže DA je výškou trojuholníka ABC, je rovina AHD' kolmá na rovinu ABC, takže priamka HD' (priesečnica rovín BHD' a AHD') je kolmá na rovinu ABC.



Obr. 2

Priamka BD' je kolmá na priamku AC aj na priamku CD' (uhol $BD'C$ sa zhoduje s pravým uhlom BDC nad priemerom BC) – je teda kolmá na rovinu ACD'. Potom je však pravý aj uhol $AD'B$. Bod D' leží v rovine CHD' kolmej na rovinu ABC, pričom priamka $CH = CE$ je výškou trojuholníka ABC. Presne tieto vlastnosti má aj bod E' trojuholníka BAE', ktorý vznikne otočením pravouhlého trojuholníka BAE okolo priamky BA tak, aby rovina BHE' bola kolmá na rovinu ABC. Body D' a E' teda splývajú, a preto $|BD| = |BD'| = |BE'| = |BE|$.

Iné riešenie. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC a K, M a L päty výšok postupne z vrcholov A, B a C. Rovnako ako v druhom riešení opakovaným využitím Pytagorovej vety dostávame

$$
\begin{aligned}
&|BD|^2 - |BE|^2 = \\
&\quad = (|BD|^2 - |BH|^2) + (|BH|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |BK|^2) - (|BK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |BL|^2) - (|BL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|KD|^2 - |HK|^2) + (|HL|^2 - |LE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |CK|^2) - (|CK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |AL|^2) - (|AL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|CD|^2 - |CH|^2) + (|AH|^2 - |AE|^2) = \\
&\quad = |CD|^2 + |AH|^2 - |CH|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AM|^2 + |MH|^2) - (|MH|^2 + |CM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + |AM|^2 - |CM|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AB|^2 - |BM|^2) - (|BC|^2 - |BM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = (|BC|^2 - |BD|^2) + |AB|^2 - |BC|^2 - (|AB|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = -|BD|^2 + |BE|^2,
\end{aligned}
$$

z toho vyplýva $2|BD|^2 = 2|BE|^2$, a teda $|BE| = |BD|$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak študent postupuje podľa prvého riešenia, tak za využitie Euklidovej vety o odvesne dajte 3 body a za využitie mocnosti bodu ku kružnici nad priemerom BC tiež 3 body.

4. *V každom políčku tabuľky 8×8 je napísané jedno nezáporné celé číslo tak, že každé dve čísla, ktoré sú na políčkach súmerne združených podľa jednej či druhej uhlopriečky, sú rovnaké. Súčet všetkých 64 čísel je* $1\,000$, *súčet 16 čísel na uhlopriečkach je* 200. *Dokážte, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky je nanajvýš* 300. *Platí rovnaký záver aj pre číslo* 299*?* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Riadky a stĺpce uvažovanej tabuľky očíslujme zhora nadol, resp. zľava doprava číslami $1, 2, \dots, 8$.

Najskôr ukážeme, že súčet čísel v každom riadku a stĺpci je nanajvýš 300. Uvedomme si, že zložením oboch súmerností podľa uhlopriečok vznikne stredová súmernosť podľa stredu danej tabuľky. To teda znamená, že pre každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ budú riadky i, $9-i$ a stĺpca i, $9-i$ obsahovať štyri zhodné osmice čísel. Súčet dvoch diagonálnych čísel z tejto osmice je nanajvýš $200 : 2 = 100$, pretože každé z týchto čísel je v súčte všetkých 16 (nezáporných) čísel na oboch uhlopriečkach započítané dvakrát. Súčet šiestich čísel z uvažovanej osmice, ktoré neležia na žiadnej z uhlopriečok, je nanajvýš $800 : 4 = 200$, pretože v súčte $1\,000 - 200 = 800$ všetkých 48 nediagonálnych (nezáporných) čísel je každé číslo započítané štyrikrát. Preto súčet všetkých ôsmich čísel v žiadnom riadku ani stĺpci neprevyšuje $100 + 200 = 300$.

Ostáva nájsť príklad tabuľky, pre ktorú záver s číslom 299 neplatí. Ak zapíšeme číslo 50 do štyroch rohových políčok, číslo 100 do ôsmich políčok krajných riadkov a stĺpcov, ktoré susedia s rohovými políčkami, a nuly do ostatných políčok, dostaneme vyhovujúcu tabuľku, ktorá má v krajných riadkoch a stĺpcoch súčet 300, teda viac ako posudzovaných 299. (Iný z mnohých kontrapríkladov je opísaný v závere druhého riešenia.)

Iné riešenie. Označme niektoré čísla v tabuľke podľa schémy vľavo. Týmito číslami už vieme vďaka symetrii podľa uhlopriečok vyplniť celú tabuľku (schému vpravo):

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	
		a_3	b_6	c_6	d_3		
			a_4	d_4			

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
b_1	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	c_1
b_2	b_4	a_3	b_6	c_6	d_3	c_4	c_2
b_3	b_5	b_6	a_4	d_4	c_6	c_5	c_3
c_3	c_5	c_6	d_4	a_4	b_6	b_5	b_3
c_2	c_4	d_3	c_6	b_6	a_3	b_4	b_2
c_1	d_2	c_4	c_5	b_5	b_4	a_2	b_1
d_1	c_1	c_2	c_3	b_3	b_2	b_1	a_1

Označme súčty čísel v týchto skupinách zodpovedajúcim veľkým písmenom, t. j. $A = a_1 + \dots + a_4$, $B = b_1 + \dots + b_6$, $C = c_1 + \dots + c_6$, $D = d_1 + \dots + d_4$. Zo zadania tak máme $2(A + D) = 200$ a $2(A + D) + 4(B + C) = 1\,000$, z čoho úpravou dostaneme $A + D = 100$ a $B + C = 200$.

Vzhľadom na symetriu čísel v tabuľke teraz stačí ukázať, že tvrdenie platí pre každý z prvých štyroch riadkov. Všetky čísla sú nezáporné a v jednom riadku sa nevyskytujú dve rovnako označené čísla, preto ich súčet je nanajvýš

$$a_1 + \dots + a_4 + b_1 + \dots + b_6 + c_1 + \dots + c_6 + d_1 + \dots + d_4 = A + B + C + D = 300.$$

Vyhovujúcu tabuľku, pre ktorú záver s číslom 299 neplatí, dostaneme napríklad pre hodnoty $a_1 = 100$, $b_1 = 200$ a ostatné čísla nulové.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Nájdenie kontrapríkladu pre číslo 299 odmeňte 2 bodmi.

Ak študent postupuje podľa prvého riešenia, dajte 2 body za ohraničenie súčtu dvoch diagonálnych čísel v jednom riadku alebo stĺpci číslom 100. Zdôvodnenie, že každé z nediagonálnych čísel sa v tabuľke vyskytuje práve štyrikrát a že ich súčet v jednej osmici je nanajvýš 200, ohodnoťte ďalšími 2 bodmi.

Ak postupuje študent podľa druhého riešenia, dajte 1 bod za rozdelenie čísel podľa súmernosti na oblasti A, B, C a D a za výpočet $A + D = 100$ a $B + C = 200$ dajte ďalší bod. Zostávajúce dva body dajte za podrobné zdôvodnenie, prečo nie je možné, aby sa v jednom riadku alebo stĺpci vyskytovali dve čísla z jednej oblasti B, resp. C.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014