63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier a, b, c také, že päťciferné čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere $63:36$.* (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Zostavíme a vyriešime rovnicu pre neznáme cifry a, b, c, ktorú vďaka tvaru zadaných čísel môžeme zapísať rovno pre jedinú neznámu $x = 100a + 10b + c$:

$$\begin{aligned} \frac{60\,000 + 10x + 3}{30\,000 + 10x + 6} &= \frac{63}{36} = \frac{7}{4}, \\ 40x + 240\,012 &= 70x + 210\,042, \\ 30x &= 29\,970, \\ x &= 999. \end{aligned}$$

Záver. Nájdenému x zodpovedá trojica cifier $a = b = c = 9$. Úloha má jediné riešenie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za zostavenie správnej rovnice a 3 body za jej vyriešenie a záver. Len za uhádnutie výsledku (bez vysvetlenia, že je jediný možný) dajte 1 bod.

---

2. *Šachového turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Poradie hráčov na turnaji sa určuje podľa počtu získaných bodov. Jediným ďalším kritériom rozhodujúcim o konečnom umiestnení hráčov v prípade rovnosti bodov je počet výhier (kto má viac výhier, je na tom v umiestnení lepšie). Na turnaji získali všetci hráči rovnaký počet bodov. Vojto porazil Petra a o prvé miesto sa delil s Tomášom. Ako dopadla partia medzi Petrom a Martinom?* (*Martin Panák*)

Riešenie. Každý hráč odohral po jednej partii so zvyšnými štyrmi. Bolo teda odohraných celkom $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ partií, takže každý hráč získal práve 2 body. Sú len tri možnosti, ako získať odohraním štyroch partií 2 body, a podľa toho obsahovala celková tabuľka nanajvýš tri rovnocenné skupiny hráčov. Tieto skupiny, A, B a C, uvádzame v poradí, v ktorom by sa v konečnej tabuľke umiestnili:

Skupina A obsahuje všetkých hráčov, ktorí majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Skupina B pozostáva z hráčov s jednou výhrou, jednou prehrou a dvoma remízami. Skupina C obsahuje hráčov so štyrmi remízami.

Vojto a Tomáš sú jediní víťazi, preto nepatria do skupiny C. Nepatria ani do skupiny B, pretože v opačnom prípade by s nimi museli všetci traja hráči zo skupiny C s horším výsledkom remizovať (a každý hráč skupiny B má len dve remízy).

Z toho vyplýva, že Vojto a Tomáš majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách a skupina C je prázdna. Zvyšní traja hráči tak majú po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, ktoré museli uhrať navzájom medzi sebou.

Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

Iné riešenie. Využijeme (nadbytočný) údaj, že Vojto porazil Petra: Keby mali Vojto a Tomáš po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, musel by aj Peter patriť medzi víťazov turnaja. Jediný v poradí nižší celkový výsledok sú totiž štyri remízy, Peter však jednu partiu prehral, a tak musel aj jednu vyhrať. Vojto a Tomáš majú preto po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Ak Peter prehral s Vojtom, musel poraziť Tomáša. (Nemohol mať dve prehry, keďže bol v poradí nižšie ako Tomáš a Vojto. Ani nemohol s Tomášom, ktorý žiadnu remízu nemá, remizovať.) Potrebný druhý bod získal dvoma remízami – s Martinom a nepomenovaným piatym hráčom.

Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

---

3. *Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leqq ac + bc$.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Vzhľadom na podmienku $c^2 + ab = a^2 + b^2$ stačí dokázať nerovnosť $a^2 + b^2 \leqq ac + bc$. Tá je ekvivalentná so vzťahom $(a^2 + b^2)^2 \leqq c^2(a + b)^2$, ktorý vzhľadom na danú podmienku prepíšeme na tvar

$$(a^2 + b^2)^2 \leqq (a^2 + b^2 - ab)(a + b)^2. \tag{1}$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých členov zistíme, že máme dokázať nerovnosť

$$0 \leqq a^3b + ab^3 - 2a^2b^2 = ab(a - b)^2,$$

ktorá pre kladné čísla a, b zrejme platí. Vzhľadom na to, že všetky úpravy boli ekvivalentné, môžeme celý postup obrátiť. Nerovnosť je tak dokázaná.

Iné riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $0 < b \leqq a$ (dané vzťahy sa výmenou čísel a a b nemenia). Nerovnosť $c^2 + ab \leqq ac + bc$ je ekvivalentná s nerovnosťou $(a - c)(c - b) \geqq 0$, takže stačí dokázať, že $b \leqq c \leqq a$. Platí

$$c^2 = b^2 + a^2 - ab = b^2 + a(a - b) \geqq b^2,$$

teda $b \leqq c$. Analogicky zistíme, že

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + b(b - a) \leqq a^2,$$

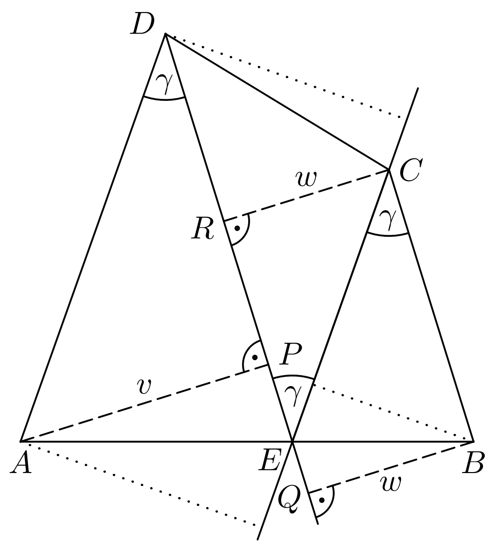
a odtiaľ $c \leqq a$. Tým je dôkaz prevedený.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za prevedenie pôvodnej nerovnosti na súčinový tvar, alebo 4 body za úpravu na tvar (1).

---

4. *Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom E vnútri strany AB tak, že platí $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle DEC| = |\measuredangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka ECD.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Hľadaný obsah trojuholníka ECD označme S. Uhol DEC je striedavý s uhlami ADE a ECB, odtiaľ $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 1). Trojuholníky EDA



Obr. 1

a EDC majú spoločnú stranu ED, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru prislúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme P, Q a R kolmé priemety vrcholov A, B a C na priamku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov AEP a BEQ úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky ECD a ECB zistíme, že

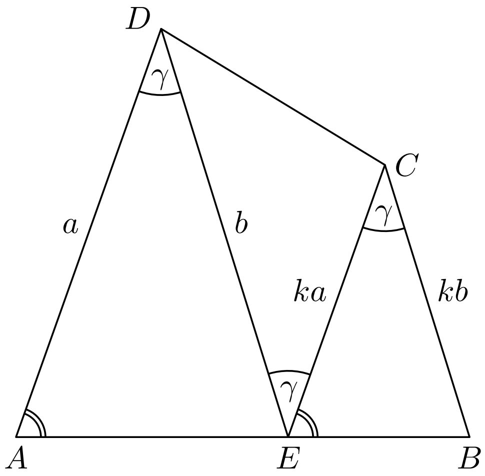
$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 1 sú prislúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ a prislúchajúce obsahy trojuholníkov AED a BEC.) Dokopy teda je $S : 8 = 18 : S$ čiže $S^2 = 144$, takže trojuholník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení zistíme, že $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$. Z toho vyplýva podobnosť trojuholníkov AED a EBC. Ak označíme k príslušný pomer podobnosti (obr. 2), platí pre obsahy dotyčných trojuholníkov

$$18 = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \tfrac{1}{2}ka \cdot b\sin\gamma, \quad 8 = \tfrac{1}{2}ka \cdot kb\sin\gamma,$$

takže zrejme platí $18 \cdot 8 = S^2$. Pre obsah trojuholníka ECD tak dostávame $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie vzťahov $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014