

63. ročník Matematickej olympiády  
2013/2014

## Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: [skmo.sk](http://skmo.sk). Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu [skmo@skmo.sk](mailto:skmo@skmo.sk) v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke [skmo.sk/dokument.php?id=429](http://skmo.sk/dokument.php?id=429) nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. *Angela, Barbora, Jano, Vlado a Matúš súťažili v hode papierovým lietadielkom. Každý hádzal raz a súčet dĺžok ich hodov bol 41 metrov. Matúš hodil najmenej, čo bolo o 90 cm menej ako hodila Angela, a tá hodila o 60 cm menej ako Vlado. Jano hodil najďalej a trafil lietadielkom do pásky označujúcej celé metre. Ak by súťažili iba Matúš, Vlado a Angela, priemerná dĺžka hodu by bola o 20 cm kratšia. Určte dĺžky hodov všetkých menovaných detí.* (Lenka Dedková)

**Riešenie.** Dĺžky hodov v metroch označíme začiatočnými písmenami súťažiacich. (Všetky nasledujúce výsledky sú tiež v metroch a túto jednotku vo výpočtoch neuvádzame.) Súčet dĺžok všetkých ich hodov bol 41 metrov,

$$a + b + j + v + m = 41, \quad (1)$$

a priemerná dĺžka ich hodov bola

$$\frac{a + b + j + v + m}{5} = 8,2.$$

Ak by súťažili iba Matúš, Vlado a Angela, priemerná dĺžka hodu by bola o 20 cm kratšia, tzn. presne 8 m:

$$\frac{a + v + m}{3} = 8.$$

Po úprave dostávame

$$a + v + m = 24. \quad (2)$$

Zo zadania vieme, že Matúš hodil najmenej, čo bolo o 90 cm menej, ako hodila Angela, a tá hodila o 60 cm menej ako Vlado:

$$a = m + 0,9, \quad v = a + 0,6 = m + 1,5. \quad (3)$$

Dosadením do rovnice (2) dostávame

$$\begin{aligned}m + 0,9 + m + 1,5 + m &= 24, \\ m &= 7,2.\end{aligned}$$

Dosadením do rovníc (3) dopočítame dĺžky hodov Angely a Vlada:

$$a = 7,2 + 0,9 = 8,1, \quad v = 7,2 + 1,5 = 8,7.$$

Podľa rovnice (2) nahradíme v rovnici (1) súčet  $a + v + m$  číslom 24, upravíme a získame rovnicu

$$b + j = 17.$$

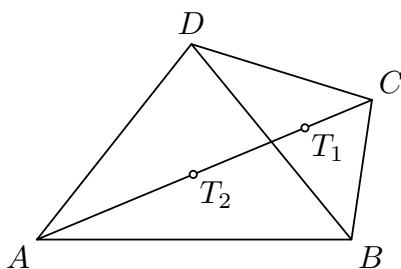
Zo zadania ďalej vieme, že Jano hodil najďalej a trafil sa lietadielkom do pásky označujúcej celé metre. Porovnaním so zatiaľ najdlhším vypočítaným hodom zisťujeme, že Jano hodil aspoň 9 metrov. Keby Jano hodil práve 9 metrov, Barbora by hodila  $17 - 9 = 8$  metrov. Keby Jano hodil 10 metrov (alebo viac), hodila by Barbora 7 metrov (alebo menej). To však nie je možné, pretože najmenej zo všetkých hodil Matúš. Úloha má teda jednoznačné riešenie, a to

$$a = 8,1, \quad b = 8, \quad j = 9, \quad v = 8,7, \quad m = 7,2.$$

*Návrh hodnotenia.* 2 body za zistenie, že  $a + v + m = 24$ ; 2 body za vypočítanie dĺžok hodov Angely, Vlada a Matúša; 2 body za vypočítanie dĺžok hodov Barbory a Jana vrátane zdôvodnenia, že sa jedná o jediné riešenie.

---

**2.** Daný je štvoruholník  $ABCD$ , pozri obr.. Bod  $T_1$  je ťažiskom trojuholníka  $BCD$ , bod  $T_2$  je ťažiskom trojuholníka  $ABD$  a body  $T_1$  a  $T_2$  ležia na úsečke  $AC$ . Dĺžka úsečky  $T_1T_2$  je 3 cm a bod  $D$  má od úsečky  $AC$  vzdialenosť 3 cm. Určte obsah štvoruholníka  $ABCD$ .  
(Eva Patáková)



**Riešenie.** Označme  $E$  priesečník uhlopriečok štvoruholníka  $ABCD$ . Body  $T_1$  a  $T_2$  sú ťažiskami trojuholníkov  $BCD$  a  $ABD$ , úsečky  $CE$  a  $AE$  sú teda ťažnicami v týchto trojuholníkoch, a preto je bod  $E$  stredom úsečky  $BD$ . Keďže  $|DE| = |EB|$ , sú si rovné obsahy trojuholníkov  $DEC$  a  $EBC$  a tiež obsahy trojuholníkov  $DEA$  a  $EBA$ . Z toho vyplýva, že trojuholníky  $ACD$  a  $ACB$  majú rovnaký obsah. Zo zadania poznáme veľkosť výšky trojuholníka  $ACD$  z vrcholu  $D$ , na vyjadrenie jeho obsahu potrebujeme určiť dĺžku úsečky  $AC$ .

Z vlastnosti ťažísk vieme, že

$$|CE| = 3 \cdot |T_1E|, \quad |AE| = 3 \cdot |T_2E|.$$

Veľkosť úsečky  $AC$  je

$$|AC| = |AE| + |EC| = 3 \cdot (|T_2E| + |ET_1|) = 3 \cdot |T_2T_1| = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (cm)}.$$

Veľkosť výšky trojuholníka  $ACD$  z vrcholu  $D$  je 3 cm, obsah trojuholníka je teda rovný

$$S_{ACD} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

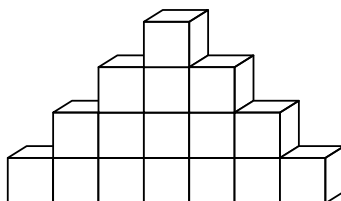
Obsah štvoruholníka  $ABCD$  je rovný

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ACD} = 27 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

*Návrh hodnotenia.* 3 body za určenie dĺžky úsečky  $AC$ ; 2 body za zdôvodnenie rovnosti obsahov trojuholníkov  $ACD$  a  $ACB$ ; 1 bod za určenie hľadaného obsahu.

---

**3.** V meste rekordov a kuriozít postavili pyramídu z kociek. V hornej vrstve je jedna kocka a počty kociek v jednotlivých vrstvách sa smerom nadol zväčšujú vždy o dve (niekoľko horných vrstiev stavby je znázornených na obr.). Prvá, teda najspodnejšia vrstva má čiernu farbu, druhá sivú, tretia bielu, štvrtá opäť čiernu, piata sivú, šiesta bielu a takto sa farby pravidelne striedajú až k hornej vrstve. Určte, koľko má pyramída vrstiev, ak viete, že čiernych kociek je použitých o 55 viac ako bielych.



(Libor Šimůnek)

**Riešenie.** V prvých troch vrstvách počítaných odspodu je počet čiernych kociek o 4 väčší ako počet bielych. Tvrdenie platí aj pre každú ďalšiu trojicu vrstiev s čiernymi kockami na spodu. V zadaní nie je uvedené,

- či možno stavbu rozdeliť bezo zvyšku na také trojice,
- či je nad hornou trojicou ešte jedna vrstva, a síce čierna,
- či sú nad hornou trojicou ešte dve vrstvy, čierna a sivá.

V prípade a) by rozdiel medzi počtami čiernych a bielych kociek musel byť násobkom štyroch, v prípade b) by tento rozdiel musel byť násobkom štyroch zväčšeným o jedna a v prípade c) by musel byť násobkom štyroch zväčšeným o tri.

Keď zadaný rozdiel 55 vydáme 4, dostaneme 13 a zvyšok 3. Z toho vidíme, že z uvedených možností platí c). Pyramída má celkom  $13 \cdot 3 + 2 = 41$  vrstiev.

**Iné riešenie.** Riešenie rozdelíme na tri časti. V časti a) budeme predpokladať, že vrchná vrstva je biela, v časti b), že vrchná vrstva je čierna, a v časti c), že vrchná

vrstva je sivá. V každej časti riešenia budeme do tabuľky postupne pridávať zväčšujúce sa vrstvy. Zadanie uvádza, že najväčšia vrstva je čierna, preto pri každej čiernej vrstve zaznamenáme rozdiel medzi počtami čiernych a bielych kociek v doposiaľ zapísaných vrstvách. Tabuľku prestaneme vypisovať, akonáhle bude tento rozdiel rovný 55 alebo bude väčší.

a) Horná kocka biela:

vrstva zhora	1	2	3	4	5	6	.....	37	38	39	40	41	42
kociek vo vrstve	1	3	5	7	9	11	.....	73	75	77	79	81	83
farba	b	s	č	b	s	č	.....	b	s	č	b	s	č
rozdiel	4			8			.....	52			56		

b) Horná kocka čierna:

vrstva zhora	1	2	3	4	5	6	7	.....	38	39	40	41	42	43
kociek vo vrstve	1	3	5	7	9	11	13	.....	75	77	79	81	83	85
farba	č	b	s	č	b	s	č	.....	b	s	č	b	s	č
rozdiel	1	5			9			.....	53			57		

c) Horná kocka sivá:

vrstva zhora	1	2	3	4	5	6	7	8	...	36	37	38	39	40	41
kociek vo vrstve	1	3	5	7	9	11	13	15	...	71	73	75	77	79	81
farba	s	č	b	s	č	b	s	č	...	b	s	č	b	s	č
rozdiel	3		7			11			...	51			55		

K rozdielu 55 sme došli iba v tabuľke c), podľa ktorej má stavba 41 vrstiev.

*Návrh hodnotenia.* 2 + 2 body za vylúčenie možností a) a b); 2 body za správny počet vrstiev.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Huciková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Huciková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014