

63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

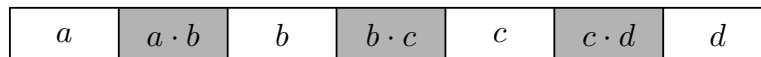
Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Tabuľka na obr. má obsahovať sedem prirodzených čísel, pričom v každom sivom políčku má byť súčin čísel z dvoch bielych políčok, ktoré s ním susedia. Čísla v bielych políčkach sú navzájom rôzne a súčin čísel v sivých políčkach je rovný 525. Aký je súčet čísel v sivých políčkach? Nájdite všetky možnosti. (Eva Patáková)



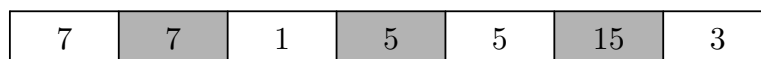
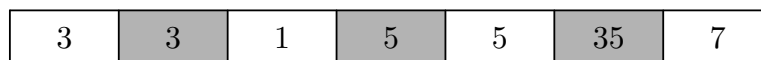
Riešenie. Označíme čísla v bielych políčkach a pomocou nich vyjadríme, ako vyzerajú súčiny v sivých políčkach:



Súčin čísel v sivých políčkach je pri zavedenom označení rovný $a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot d$, a ten má byť rovný 525. Jediný spôsob, ako vyjadriť toto číslo ako súčin šiestich prirodzených čísel, pričom činiteľ 1 nie je použitý viac ako dvakrát, je

$$525 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Porovnaním s predchádzajúcim vyjadrením zisťujeme, že 1 a 5 musia byť vo vnútorných bielych políčkach, zatiaľ čo 3 a 7 v krajných. Dve zo štyroch možných vyplnení tabuľky sú na nasledujúcom obrázku. Zvyšné dve vyplnenia sú osovo súmerné s uvedenými, takže dávajú taký istý súčet čísel v sivých políčkach.



Možné súčty čísel v sivých políčkach sú $3 + 5 + 35 = 43$ a $7 + 5 + 15 = 27$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za rozklad čísla 525 na 6 prirodzených čísel; 2 body za nájdenie jedného vyplnenia; 2 body za nájdenie druhého vyplnenia; 1 bod za určenie správnych súčtov.

2. Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka pretekali v čítaní tej istej knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka prečítať 32 strán, čo bolo presne v strede medzi počtami strán, ktoré stihli prečítať Saša a Zuzka. Ivana prečítala o 5 strán viac ako Zuzka a Majka prečítala o 8 strán menej ako Saša. Žiadne dve dievčatá neprečítali rovnaký počet strán a najhorší výsledok bol 27 strán. Určte, koľko strán prečítali jednotlivé dievčatá.

(Monika Dillingerová)

Riešenie. Uvažujme, ktoré dievča mohlo prečítať najmenej strán. Lucka to byť nemohla, pretože jej výsledok bol iný ako 27. Saša to byť nemohla, pretože Majka prečítala o 8 strán menej. Ak by to bola Zuzka, tak by Ivana musela prečítať $27 + 5 = 32$ strán. Tento prípad však nastať nemohol, pretože každé z dievčat prečítalo iný počet strán. Ivana to tiež byť nemohla, pretože Zuzka prečítala o 5 strán menej ako ona. Takže najmenej strán musela prečítať Majka.

Ak Majka prečítala 27 strán, tak Saša prečítala $27 + 8 = 35$ strán, čo je o 3 viac ako Lucka. Zuzka tak musela prečítať o 3 strany menej ako Lucka, teda $32 - 3 = 29$ strán. Posledné z dievčat, Ivana, prečítala $29 + 5 = 34$ strán.

Návrh hodnotenia. 1 bod za zistenie, že Ivana ani Saša neprečítali 27 strán; 2 body za zistenie, že Zuzka neprečítala 27 strán; 3 body za výsledky dievčat.

Poznámka. Riešenie je možné znázorňovať graficky podobne ako v domácom kole.

3. Po náraze kamienka praskla sklenená tabuľa tak, že vznikli štyri menšie trojuholníky so spoločným vrcholom v mieste nárazu. Pritom platí, že:

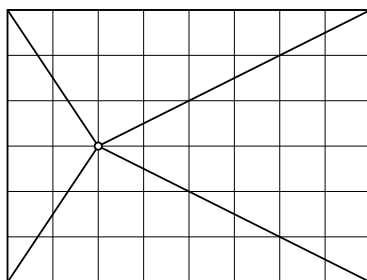
- sklenená tabuľa mala tvar obdĺžnika, ktorý bol 8 dm široký a 6 dm vysoký,
- trojuholník vpravo mal trikrát väčší obsah ako trojuholník vľavo,
- trojuholník vľavo mal dvakrát menší obsah ako trojuholník dole.

Určte vzdialenosti bodu nárazu od strán obdĺžnika.

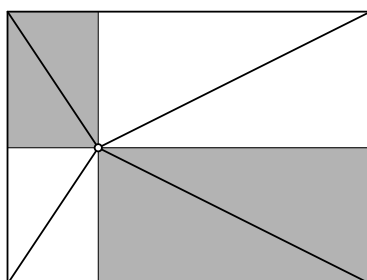
(Erika Novotná)

Riešenie. Trojuholník vpravo a trojuholník vľavo majú rovnako dlhú jednu stranu, a to stranu dlhú 6 dm, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Keďže trojuholník vpravo má trikrát väčší obsah ako ten vľavo, musia byť veľkosti ich výšok na uvedenú stranu v rovnakom pomere. Súčet týchto výšok je rovný šírke obdĺžnika, ktorá je 8 dm. Výška ľavého trojuholníka, t. j. vzdialenosť bodu nárazu od ľavej strany obdĺžnika, je teda 2 dm a výška pravého trojuholníka, t. j. vzdialenosť bodu nárazu od pravej strany obdĺžnika, je 6 dm.

Z uvedeného vyplýva, že trojuholník vľavo má obsah 6 dm^2 ($\frac{6 \cdot 2}{2} = 6$). Trojuholník dole má obsah dvakrát väčší, teda 12 dm^2 . Strana dolného trojuholníka, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika, je dlhá 8 dm. To znamená, že zodpovedajúca výška tohto trojuholníka, t. j. vzdialenosť bodu nárazu od dolnej strany obdĺžnika, musí byť 3 dm ($\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$). Výška obdĺžnika je 6 dm, teda vzdialenosť bodu nárazu od hornej strany obdĺžnika je tiež 3 dm ($6 - 3 = 3$).



Iné riešenie. Rozdeľme obdĺžnik priamkami prechádzajúcimi bodom nárazu na štyri menšie pravouholníky ako na obrázku.



Každý z týchto pravouholníkov je prasklinami rozdelený na dva zhodné trojuholníky. Z toho vyplýva, že súčet obsahov ľavého a pravého trojuholníka je taký istý ako súčet obsahov horného a dolného trojuholníka. Tento súčet je teda polovicou obsahu celého obdĺžnika, t.j. 24 dm^2 . Z druhej podmienky v zadaní vyplýva, že obsah trojuholníka vľavo musí byť 6 dm^2 a obsah toho vpravo 18 dm^2 . Z tretej podmienky v zadaní vyplýva, že obsah trojuholníka dole je 12 dm^2 . Obsah trojuholníka hore je teda taký istý.

U všetkých trojuholníkov poznáme obsah a jednu stranu. Zodpovedajúce výšky, t. j. vzdialenosti bodu nárazu od jednotlivých strán obdĺžnika, možno teraz určiť rovnako ako v druhej časti predchádzajúceho riešenia.

Návrh hodnotenia. 3 body za vzdialenosti bodu nárazu od ľavej a pravej strany obdĺžnika; 3 body za vzdialenosti bodu nárazu od dolnej a hornej strany obdĺžnika. Správne riešenie bez komentára ohodnoťte nanajviš 3 bodmi.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014