

**63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014**

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Keď kráčame pozdĺž plota zo severu na juh, sú rozstupy medzi jeho stĺpkami zo začiatku zhodné. Od určitého stĺpika sa rozstup zmenší na 2,9 metra a taký zostáva až po južný koniec plota. Medzi 1. a 16. stĺpikom (počítané od severu) sa rozstupy nemenia a vzdialenosť medzi týmito dvoma stĺpkami je 48 metrov. Vzdialenosť medzi 16. a 28. stĺpikom je 36 metrov. Koľký stĺpik má od svojich susedných stĺpikov rôzne rozstupy?
(Libor Šimůnek)

Riešenie. V úseku medzi 1. a 16. stĺpikom je 15 medzier a podľa zadania sa ich šírka nemení. Každá z nich preto meria $48 : 15 = 3,2$ metra, a je teda o 0,3 metra väčšia ako medzera pri južnom konci plota.

Keby všetky medzery medzi 16. a 28. stĺpikom merali zadaných 2,9 metra, bola by celková vzdialenosť medzi týmito stĺpkami $12 \cdot 2,9 = 34,8$ metra. Podľa zadania je však táto vzdialenosť 36 metrov, čo je o 1,2 metra viac. Tento rozdiel možno vyjadriť ako $4 \cdot 0,3$ metra, teda práve štyri medzery v úseku medzi týmito stĺpkami sú o 0,3 metra dlhšie ako zadaných 2,9 metra. Jedná sa o medzery medzi 16. a 20. stĺpikom.

Hľadaný stĺpik, ktorý má od svojich susedných stĺpikov rôzne rozstupy, je 20. v poradí.

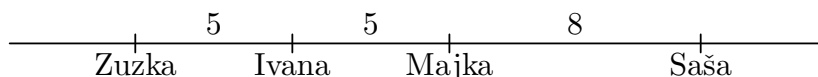
Návrh hodnotenia. 2 body za výpočet veľkosti severnej medzery 3,2m; 3 body za počet medzier s veľkosťou 3,2m medzi 16. a 28. stĺpikom (resp. celkový počet medzier s veľkosťou 2,9m); 1 bod za výsledok.

2. Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka pretekali v čítaní tej istej knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka prečítať 32 strán, čo bolo presne v strede medzi počtami strán, ktoré stihli prečítať Saša a Zuzka. Ivana prečítala o 5 strán viac ako Zuzka a Majka prečítala o 8 strán menej ako Saša. Ivanin výsledok bol presne v strede medzi Majkiným a Zuzkiným. Určte, koľko strán prečítali jednotlivé dievčatá.
(Monika Dillingerová)

Riešenie. Rozhodnime, ktorá z nasledujúcich možností mohla nastať: buď prečítala Saša menej strán ako Zuzka, alebo naopak. Ak by Saša prečítala menej ako Zuzka,

znamenaloby to, že Ivana prečítala najviac. Potom by ale jej výkon nebol v strede medzi žiadnymi dvoma dievčatami. Preto musela Zuzka prečítať menej ako Saša.

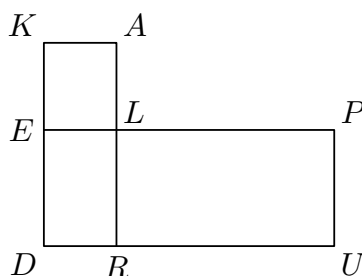
Ivana prečítala o 5 strán viac ako Zuzka a súčasne bol jej výsledok v strede medzi Zuzkou a Majkou. Preto Majka prečítala o 5 strán viac ako Ivana a zo zadania ďalej vieme, že Saša prečítala o 8 strán viac ako Majka. Sčítaním rozdielov medzi týmito štyrmi dievčatami zisťujeme, že Saša prečítala o $5 + 5 + 8 = 18$ strán viac ako Zuzka.



Lucka prečítala 32 strán, čo bolo v strede medzi Zuzkou a Sašou. Zuzka teda prečítala $32 - 9 = 23$ strán a Saša prečítala $32 + 9 = 41$ strán. Z toho dopočítame ostatné výsledky: Majka prečítala $41 - 8 = 33$ strán a Ivana prečítala $23 + 5 = 28$ strán.

Návrh hodnotenia. 2 body za zdôvodnenie, že Saša prečítala viac ako Zuzka; 2 body za zdôvodnenie, že rozdiel medzi nimi bol 18; 2 body za výsledky dievčat.

3. Na obr. je znázornených niekoľko pravouholníkov s niekoľkými spoločnými vrcholmi. Ich dĺžky strán zapísané v centimetroch sú celé čísla. Obsah pravouholníka *DRAK* je rovný 44 cm^2 , obsah pravouholníka *DUPE* je rovný 64 cm^2 a obsah mnohoholníka *DUPLAK* je rovný 92 cm^2 . Určte dĺžky strán mnohoholníka *DUPLAK*.



(Monika Dillingerová)

Riešenie. Z údajov, ktoré poznáme, vieme dopočítat obsah pravouholníka *DRLE*:

$$S_{DRLE} = 44 + 64 - 92 = 16.$$

(Všetky veličiny sú buď v cm, alebo cm^2 a tieto jednotky ďalej neuvádzame.) Dĺžky strán všetkých pravouholníkov sú celočíselné a súčasne má platiť:

$$|DR| \cdot |DE| = 16, \quad |DR| \cdot |DK| = 44, \quad |DU| \cdot |DE| = 64.$$

V nasledujúcej tabuľke vypíšeme všetky možnosti, ako vyjadriť 16 ako súčin dvoch kladných celých čísel. Pri každej z týchto možností vyjadríme veľkosti ostatných strán,

$$|DK| = 44 : |DR|, \quad |DU| = 64 : |DE|,$$

a budeme kontrolovať, či dostaneme celé čísla. Ak áno, dopočítame veľkosti zvyšných strán mnohoholníka:

$$|LA| = |DK| - |DE|, \quad |LP| = |DU| - |DR|.$$

$ DR $	1	2	4	8	16
$ DE $	16	8	4	2	1
$ DK $	44	22	11	–	–
$ DU $	4	8	16	32	64
$ LA $	28	14	7	–	–
$ PL $	3	6	12	24	48

Úloha má tri riešenia, ktoré vychádzajú z prvých troch stĺpcov predchádzajúcej tabuľky.

Návrh hodnotenia. 1 bod za obsah pravouholníka $DRLE$; 3 body za možné riešenia; 2 body za zdôvodnenie, že riešení nie je viac.

Poznámka. Vypíšeme všetky možnosti, ako vyjadriť obsahy pravouholníkov $DRAK$ a $DUPE$ ako súčiny dvoch kladných celých čísel:

$$\begin{aligned} |DR| \cdot |DK| &= 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 11 \cdot 4 = 22 \cdot 2 = 44 \cdot 1, \\ |DU| \cdot |DE| &= 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 32 \cdot 2 = 64 \cdot 1. \end{aligned}$$

Zo zadania ďalej vieme, že

$$|DR| < |DU|, \quad |DK| > |DE|, \quad |DR| \cdot |DK| + |DU| \cdot |DE| - |DR| \cdot |DE| = 92.$$

Systematickým preberaním všetkých možností sa dajú nájsť všetky tri vyššie uvedené riešenia bez toho, aby bol vyjadrený obsah pravouholníka $DRLE$. V takom prípade dajte 3 body za možné riešenia a 3 body za zdôvodnenie, že riešení nie je viac.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Huciková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Huciková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014