2007/2008
57. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 26. novembra 2007.*)

1. Nájdite všetky také trojice reálnych čísel a, b, c, že každá z rovníc

$$\begin{aligned} x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) &= 0, \\ x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) &= 0, \\ x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) &= 0 \end{aligned}$$

má v obore reálnych čísel tri rôzne korene, spolu je to však iba päť rôznych čísel.
(*Jaromír Šimša*)

2. V rovine je daná úsečka AV a ostrý uhol veľkosti α. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým tým trojuholníkom ABC s vnútorným uhlom α pri vrchole A, ktorých výšky sa pretínajú v bode V. (*Pavel Leischner*)

3. Množinu M tvorí $2n$ rôznych kladných reálnych čísel, pričom $n \geqq 2$. Uvažujme n obdĺžnikov, ktorých rozmery sú čísla z množiny M, pričom každý prvok z M je použitý práve raz. Určte, aké rozmery majú tieto obdĺžniky, ak je súčet ich obsahov
a) najväčší možný; b) najmenší možný. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určte počet konečných rastúcich postupností prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všetkých možných dĺžok k, pre ktoré platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$. (*Martin Panák*)

5. Je daná kružnica k, bod O, ktorý na nej neleží, a priamka p, ktorá ju nepretína. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu l, ktorá má vonkajší dotyk s kružnicou k a dotýka sa aj priamky p. Príslušné body dotyku označme A a B. Pokiaľ body O, A, B neležia na jednej priamke, zostrojíme kružnicu m opísanú trojuholníku OAB. Dokážte, že všetky také kružnice m prechádzajú spoločným bodom rôznym od bodu O, alebo sa dotýkajú jednej priamky. (*Ján Mazák*)

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje celé číslo a ($1 < a < 5^n$) také, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$. (*Ján Mazák*)