

2007/2008

57. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: vo štvrtok 10. januára 2008.)

1. Nájdite všetky prirodzené čísla k , pre ktoré je dekadický zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ ukončený dvojčíslím a) 02; b) 04. (Eva Řídká)

2. V páse medzi rovnobežkami p, q sú dané dva rôzne body M a N . Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec, ktorého dve protiľahlé strany ležia na priamkach p a q a zostávajúce dve strany prechádzajú bodmi M a N (každá jedným). (Jaromír Šimša)

3. Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x^3 + y^3 \leq 2$, tak $x + y \leq 2$. (Ján Mazák)

4. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c a dĺžkami ťažníc t_a, t_b, t_c , pre ktoré platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba prípady, keď AB je a) prepona, b) odvesna. (Pavel Novotný)

5. Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

(Jaroslav Švrček)

6. Obdĺžnik 2005×2007 je rozdelený na čierne a biele jednotkové štvorčeky. Dokážte, že pre niektorú z farieb (čiernu alebo bielu) existuje viac ako 95 800 pravouholníkov so šírkou aspoň 2, ktoré sa skladajú z jednotkových štvorčekov, navzájom sa neprekrývajú a ktorých rohové políčka majú túto farbu. (Pavel Leischner)