2007/2008
57. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

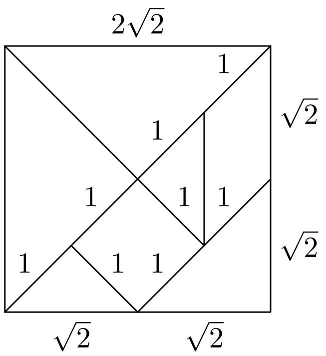
(*Termín odovzdania: vo štvrtok 10. januára 2008.*)

1. Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené. (*Jaroslav Švrček*)

2. Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD|$, ak $|\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°$. (*Jaromír Šimša*)

3. Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok? (*Vojtech Bálint*)

4. Tangram je skladačka, ktorú možno vyrobiť z papiera rozrezaním vystrihnutého štvorca na sedem dielov podľa čiar vyznačených na obr. 1. Predpokladajme, že dĺžka strany štvorca je



Obr. 1

$2\sqrt{2}$ cm. Rozhodnite, či možno z dielov tangramu zložiť:

a) obdĺžnik $2\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$,
b) obdĺžnik $\sqrt{2}\,\text{cm} \times 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. (*Pavel Leischner*)

5. V skupine n ľudí ($n \geqq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych.

a) Dokážte, že ak medzi každými štyrmi osobami sú aspoň štyri dvojice známych, tak každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.
b) Zistite, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojice známych a súčasne sa niektoré dve osoby ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho.
c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

(*Ján Mazák*)

6. Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať? (*Peter Novotný*)