2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 6. 2014.*)

1. Dokážte, že kladné reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4a^2b^2c^2 = 2\bigl(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\bigr)$$

práve vtedy, keď existuje trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ takými, že

$$\sin\alpha = a, \quad \sin\beta = b \quad \text{a} \quad \sin\gamma = c.$$

(*Jaromír Šimša*)

2. Pre dané kladné celé čísla a, b, x_1 zostavíme postupnosť čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcich vzťah $x_n = ax_{n-1} + b$ pre každé $n \geqq 2$. Určte podmienku na zadané čísla a, b a x_1, ktorá je nutná a postačujúca na to, aby pre všetky indexy m, n platila implikácia $m \mid n \Rightarrow$ $\Rightarrow x_m \mid x_n$. (*Jaromír Šimša*)

3. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ADC| = 135°$. Na polpriamkach AB, AD sú postupne zvolené také body M, N, že $|\measuredangle MCD| = |\measuredangle NCB| =$ $= 90°$. Kružnice opísané trojuholníkom AMN a ABD sa druhýkrát pretínajú v bode $K \neq A$. Dokážte, že priamky AK a KC sú navzájom kolmé. (*Irán*)

4. Daný je trojuholník ABC, pričom P je stred strany AC. Kružnica k pretína úsečky AP, CP, BC, AB postupne v ich vnútorných bodoch K, L, M, N. Označme S stred KL. Nech platí

$$2 \cdot |AN| \cdot |AB| \cdot |CL| = 2 \cdot |CM| \cdot |BC| \cdot |AK| = |AC| \cdot |AK| \cdot |CL|.$$

Dokážte, že potom priesečník priamok KN a ML leží na osi úsečky PS. (*Ján Mazák*)

5. Určte všetky kladné celé čísla n spĺňajúce nasledujúcu podmienku: pre každé nezáporné celé čísla k, m také, že $k + m \leqq n$, dávajú čísla $\binom{n-k}{m}$ a $\binom{n-m}{k}$ rovnaký zvyšok po delení dvoma. (*Poľsko*)

6. Nech $n \geqq 6$ je celé číslo a $\mathcal{F}$ je systém 3-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ spĺňajúci nasledujúcu podmienku: pre každé $1 \leqq i < j \leqq n$ existuje aspoň $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$ podmnožín $\mathsf{A} \in \mathcal{F}$ takých, že $i, j \in \mathsf{A}$. Dokážte, že pre niektoré celé číslo $m \geqq 1$ existujú navzájom disjunktné podmnožiny $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_m \in \mathcal{F}$ také, že

$$|\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_m| \geqq n - 5.$$

(*Poľsko*)