2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 12. – 15. 5. 2014.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. V rovine sú dané kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch C a D. Kružnica k prechádza stredom L kružnice l. Uvažujme ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom D, ktorá pretína kružnice k, l postupne v bodoch A, B, pričom D leží vnútri úsečky AB. Dokážte, že $|AB| = |AC|$. (*Česká rep.*)

I-2. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu $a + b + 4 = 4\sqrt{a\sqrt{b}}$. (*Poľsko*)

I-3. K dispozícii máme 10 rovnakých dlaždíc; jedna z nich je zobrazená na obrázku nižšie. Dlaždice možno otáčať v rovine ale nesmieme ich preklopiť na opačnú stranu. Plochu 7×7 chceme pokryť týmito dlaždicami takým spôsobom, že práve jeden jednotkový štvorček je pokrytý dvoma dlaždicami a všetky ostatné jednotkové štvorčeky sú pokryté práve jednou dlaždicou. Určte všetky jednotkové štvorčeky, ktoré môžu byť pokryté dvoma dlaždicami. (*Poľsko*)

I-4. Číslo a_n vzniklo napísaním všetkých čísel $1, 2, \ldots, n$ za sebou (napríklad $a_3 = 123$, $a_{11} = 1234567891011$ a pod.). Pre aký najmenší index t platí $11 \mid a_t$? (*Patrik Bak*)

I-5. Daný je štvorec. Rezmi v podobe priamok ho rozdelíme na n mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov? (*Ján Mazák*)

Súťaž družstiev:

T-1. Množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$ sme rozdelili na tri neprázdne disjunktné množiny, vypočítali sme súčin všetkých čísel v každej množine a napokon sme určili najväčšieho spoločného deliteľa uvedených troch súčinov. Aký najväčší možný výsledok sme mohli dostať? (*Peter Novotný*)

T-2. V rovnobežníku $ABCD$ platí $|\measuredangle BAD| < 90°$ a $|AB| > |BC|$. Os uhla BAD pretína úsečku CD v bode P a polpriamku opačnú k CB v bode Q. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je rovnako vzdialený od bodov B a D. (*Patrik Bak*)

T-3. Znajdź wszystkie liczby całkowite n o tej własności, że
$$|n^3 - 4n^2 + 3n - 35| \quad \text{oraz} \quad |n^2 + 4n + 8|$$
są liczbami pierwszymi. (*Česká rep.*)

T-4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg o środku w punkcie M przechodzący przez punkt C przecina proste AC i BC po raz drugi odpowiednio w punktach P i Q. Punkt R należący do odcinka AB jest taki, że trójkąty APR i BQR mają równe pola. Wykaż, że proste PQ i CR są prostopadłe. (*Poľsko*)

T-5. Na tabuli je na počátku napsáno číslo 1. Pokud je na tabuli napsáno číslo a, pak na ni můžeme napsat rovněž přirozené číslo b takové, že $a + b + 1$ je dělitelem čísla $a^2 + b^2 + 1$. Rozhodněte, zda se na tabuli po jistém čase může objevit kterékoliv předem dané přirozené číslo. Svou odpověď zdůvodněte. (*Poľsko*)

T-6. Určete největší a nejmenší hodnotu zlomku
$$F = \frac{y - x}{x + 4y},$$
jestliže reálná čísla x a y vyhovují rovnici $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$. (*Česká rep.*)