

2014/2015
64. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v pondelok 12. januára 2015.)

1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} |x - 5| + |y - 9| &= 6, \\ |x^2 - 9| + |y^2 - 5| &= 52. \end{aligned}$$

(Pavel Calábek)

2. Drak má n hláv, po jednej na každom z n krkov usporiadaných do kruhu. Rytier dokáže jedným úderom seknúť k susedných krkov a hlavy na nich sťať. Ak drakovi po údere zostane aspoň jedna hlava, môže si nechať niektorú z chýbajúcich hláv dorásť. Dokážte, že ak pre dané čísla n a k môže rytier draka zbaviť všetkých hláv bez ohľadu na to, ako mu dorastajú, dokáže to urobiť najviac tromi údermi. (Ján Mazák)

3. V trojuholníku ABC označme U stred strany AB a V stred strany AC . V polrovine opačnej k polrovine BCA uvažujme ľubovoľný rovnobežník $BCDE$. Označme X priesečník priamok UD a VE . Dokážte, že priamka AX delí rovnobežník $BCDE$ na dve časti s rovnakým obsahom. (Michal Rolínek)

4. Nech m je prirodzené číslo, ktoré má 7 kladných deliteľov, a n je prirodzené číslo, ktoré má 9 kladných deliteľov. Koľko deliteľov môže mať súčin $m \cdot n$? (Eva Patáková)

5. Nech S je stred prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC , ktorý nie je rovno-ramenný. Označme D päť výšky z vrcholu C a R priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s preponou AB . Určte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ak platí $|SR| = 2|DR|$. (Jaroslav Švrček)

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

(Jaroslav Švrček)