SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

64. ročník, školský rok 2014/2015

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 64. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **1. decembra 2014** (kategória **A**) a do **12. januára 2015** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2015 v Thajsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2015 na Slovensku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste 2015 v Slovinsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2014 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 64. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	09. 12. 2014	13. 01. 2015	22. – 25. 03. 2015
Kategórie B, C	22. 01. 2015	31. 03. 2015	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2014/2015
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Dané je prirodzené číslo n. Štvorec so stranou dĺžky n je rozdelený na n^2 jednotkových štvorčekov. Za vzdialenosť dvoch štvorčekov považujeme vzdialenosť ich stredov. Určte počet dvojíc štvorčekov, ktorých vzdialenosť je 5. (*Jaroslav Zhouf*)

A – I – 2

Daný je trojuholník ABC, v ktorom je BC najkratšia strana. Jej stred označme M. Na stranách AB a AC určíme postupne body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Priesečník priamok CX a BY označme Z. Dokážte, že priamka ZM prechádza stredom kružnice pripísanej ku strane BC daného trojuholníka. (*Michal Rolínek*)

A – I – 3

Nájdite všetky celé čísla $k \geqq 2$, pre ktoré existuje k-prvková množina M celých kladných čísel taká, že súčin všetkých čísel z M je deliteľný súčtom ľubovoľných dvoch (rôznych) čísel z M. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Predpokladajme, že pre reálne čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že aspoň jedno z nich je rôzne od nuly.

a) Dokážte rovnosť $x + y + z = 4$.

b) Nájdite najmenší interval $\langle a, b\rangle$, v ktorom ležia všetky tri čísla z ľubovoľnej trojice (x, y, z) vyhovujúcej predpokladom úlohy.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L. Kružnica vpísaná do trojuholníka ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N. Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici. (*Josef Tkadlec*)

A – I – 6

Nech a, b sú dané navzájom nesúdeliteľné prirodzené čísla. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel je zostavená tak, že pre každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokážte, že v ľubovoľnej takej postupnosti každý člen x_n s indexom $n > 1$ delí nekonečne veľa jej ďalších členov. Platí toto tvrdenie aj pre $n = 1$? (*Jaromír Šimša*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

(*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Drak má n hláv, po jednej na každom z n krkov usporiadaných do kruhu. Rytier dokáže jedným úderom seknúť k susedných krkov a hlavy na nich sťať. Ak drakovi po údere zostane aspoň jedna hlava, môže si nechať niektorú z chýbajúcich hláv dorásť. Dokážte, že ak pre dané čísla n a k môže rytier draka zbaviť všetkých hláv bez ohľadu na to, ako mu dorastajú, dokáže to urobiť najviac tromi údermi. (*Ján Mazák*)

B – I – 3

V trojuholníku ABC označme U stred strany AB a V stred strany AC. V polrovine opačnej k polrovine BCA uvažujme ľubovoľný rovnobežník $BCDE$. Označme X priesečník priamok UD a VE. Dokážte, že priamka AX delí rovnobežník $BCDE$ na dve časti s rovnakým obsahom. (*Michal Rolínek*)

B – I – 4

Nech m je prirodzené číslo, ktoré má 7 kladných deliteľov, a n je prirodzené číslo, ktoré má 9 kladných deliteľov. Koľko deliteľov môže mať súčin $m \cdot n$? (*Eva Patáková*)

B – I – 5

Nech S je stred prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme D pätu výšky z vrcholu C a R priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s preponou AB. Určte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ak platí $|SR| = 2|DR|$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \leqq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4 - y,\\ \sqrt{(y-4)^2} &= x + 8.\end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Peter má zvláštne hodinky s tromi ručičkami – prvá z nich obehne kruhový ciferník za minútu, druhá za 3 minúty a tretia za 15 minút. Na začiatku sú všetky ručičky v rovnakej polohe. Určte, za ako dlho budú ručičky rozdeľovať ciferník na tri zhodné časti. Nájdite všetky riešenia.

(*Tomáš Jurík*)

C – I – 3

Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leqq k \leqq 64$, vyberie Simona k políčok šachovnice 8×8 a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od k určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu. (*Michal Rolínek*)

C – I – 4

Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 5

Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2 010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2 014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve deviatky. (*Josef Tkadlec*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

64. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., PhDr. Eva Pataková, Mgr. Michal Rolínek, Bc. Stanislava Sojáková, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec, RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Redakčná úprava:	RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014