SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

64. ročník, školský rok 2014/2015

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 64. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **1. decembra 2014** (kategória **A**) a do **12. januára 2015** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2015 v Thajsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2015 na Slovensku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste 2015 v Slovinsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2014 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 64. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	09. 12. 2014	13. 01. 2015	22. – 25. 03. 2015
Kategórie B, C	22. 01. 2015	31. 03. 2015	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2014/2015
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

MATEMATIKA OLIMPIA

64-ik évfolyam 2014/2015-es tanév Házi forduló

****

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Adott egy n természetes szám. Egy n egységnyi oldalú négyzet n^2 egységnyi területű négyzetecskékre van felbontva. Két négyzetecske távolságán a középpontjaik távolságát értjük. Határozzátok meg, hány olyan négyzetecske-páros van, amelyek távolsága pontosan 5. (*Jaroslav Zhouf*)

A – I – 2

Adott az ABC háromszög, melynek BC a legrövidebb oldala. Jelölje M a BC oldal középpontját! Az AB és AC oldalon rendre vegyük fel az X és Y pontot úgy, hogy fennálljon: $|BX| = |BC| = |CY|$. Jelölje Z a CX és BY egyenesek metszéspontját! Bizonyítsátok be, hogy a BC oldal hozzáírt körének középpontja illeszkedik a ZM egyenesre! (*Michal Rolínek*)

A – I – 3

Keressétek meg az összes olyan $k \geqq 2$ egész számot, amelyre létezik egy olyan k-elemű pozitív egész számokat tartalmazó M halmaz, ahol az M halmaz összes elemének szorzata osztható az M halmaz bármely két különböző elemének összegével! (*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Tegyük fel, hogy az x, y, z valós számokra teljesül:

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2),$$

és azt is, hogy legalább az egyikük nem nulla.

a) Bizonyítsátok be, hogy $x + y + z = 4$.

b) Keressétek meg azt a legkisebb $\langle a, b\rangle$ intervallumot, amelyben a feladat feltételeit kielégítő összes (x, y, z) számhármas tagja fekszik!

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Egy adott ABC háromszögben jelölje D azt a pontot ahol a beírt kör érinti a BC oldalat. Az ABD háromszög beírt köre az AB és BD oldalakat rendre a K és L pontban érinti. Az ADC háromszög beírt köre a DC és AC oldalakat rendre az M és N pontban érinti. Bizonyítsátok be, hogy a K, L, M, N pontok egy körvonalon fekszenek! (*Josef Tkadlec*)

A – I – 6

Legyenek a és b olyan természetes számok, amelyek relatív prímek. Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ természetes számok sorozata úgy áll elő, hogy minden $n > 1$ esetén $x_n = ax_{n-1} + b$. Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges ilyen sorozatban minden $n > 1$ indexű x_n elem a sorozat végtelen sok másik elemének osztója! Érvényes marad-e ez az állítás $n = 1$ esetében is? (*Jaromír Šimša*)

B KATEGÓRIA

B – I – 1
A valós számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletrendszert:

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

(*Pavel Calábek*)

B – I – 2
A sárkánynak n nyaka van körben a testén, s minden nyakán egy-egy fej van. A lovag egy vágással k szomszédos nyakat tud átvágni és az ezen nyakakon levő fejeket levágni. Ha a sárkánynak marad legalább egy feje a vágás után, akkor egy neki tetszőlegesen kiválasztott nyakon vissza tudja növeszteni a fejét. Bizonyítsátok be, hogy ha adott n és k esetén a lovag le tudja vágni a sárkány összes fejét tekintet nélkül arra, hogy melyik fejeit növeszti vissza, akkor ezt meg tudja tenni legfeljebb három vágással is! (*Ján Mazák*)

B – I – 3
Egy ABC háromszögben jelölje rendre U és V az AB, ill. AC oldalak középpontját. A BCA-val ellentétes félsíkban vegyünk egy tetszőleges $BCDE$ paralelogrammát. Továbbá, jelölje X az UD és VE egyenesek metszéspontját. Bizonyítsátok be, hogy az AX egyenes a $BCDE$ paralelogrammát két azonos területű részre bontja! (*Michal Rolínek*)

B – I – 4
Legyen m egy olyan szám, amelynek hét pozitív osztója van, valamint n egy olyan szám, amelynek kilenc pozitív osztója van. Hány osztója lehet az $m \cdot n$ szorzatnak? (*Eva Patáková*)

B – I – 5
Jelölje S az ABC derékszögű háromszög (amely nem egyenlő szárú) AB átfogójának középpontját! Jelölje D a C csúcsból húzott magasságvonal talppontját, és R a C csúcsnál lévő belső szög szögfelezőjének metszéspontját az AB átfogóval! Határozzátok meg a háromszög belső szögeinek nagyságát, ha $|SR| = 2|DR|$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6
Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra fennáll a

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \leqq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

egyenlőtlenség. Állapítsátok meg, mikor áll fenn egyenlőség! (*Jaroslav Švrček*)

C KATEGÓRIA

C – I – 1

Határozzátok meg az összes olyan (x, y) valós számpárt, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\sqrt{(x+4)^2} = 4 - y,$$
$$\sqrt{(y-4)^2} = x + 8.$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Péternek van egy fura órája, amelyen három mutató van. Az egyik 1 perc alatt, a másik 3 perc alatt, a harmadik pedig 15 perc alatt futja körbe az óra számlapját. Kezdetben a mutatók mind ugyanabban a helyzetben vannak. Határozzátok meg, hogy mikor fogják a mutatók a számlapot 3 egyforma részre osztani! Keressétek meg az összes megoldást! (*Tomáš Jurík*)

C – I – 3

Szimona és Lenke egy játékot játszik. Egy adott k természetes számra, ahol $0 \leqq k \leqq 64$, Szimona kiválaszt k mezőt egy sakktáblán és ezeket megjelöli kereszttel. Ezek után Lenke 32 dominóval lefedi a sakktáblát. Ha azon dominók száma, amelyek 2 keresztet fednek le páratlan, akkor Lenke nyer, különben Szimona. Határozzátok meg, hogy a k értékétől függően kinek van nyerő stratégiája! (*Michal Rolínek*)

C – I – 4

Jelölje E az $ABCD$ trapéz AB alapjának középpontját, ahol $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Az AC átló az ED és BD szakaszokat rendre az F és G pontokban metszi. Határozzátok meg az

$$|AF| : |FG| : |GC|$$

arányt! (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 5

Két természetes szám különbsége 2010, a legnagyobb közös osztójuk pedig 2014-szer kisebb, mint a legkisebb közös többszörösük. Találjátok meg az összes ilyen számpárt!

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

A $\sqrt{n}$ közvetlenül a tizedesvessző után két kilencest tartalmaz. Keressétek meg a legkisebb ilyen természetes számot! (*Josef Tkadlec*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

64. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., PhDr. Eva Patáková, Mgr. Michal Rolínek, Bc. Stanislava Sojáková, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec, RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Redakčná úprava:	RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014