2013/2014
63. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 18. – 24. 9. 2014.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$xf(y) + f\big(xf(y)\big) - xf\big(f(y)\big) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Litva*)

I-2. Daný je pravidelný n-uholník, ktorý rozrežeme na $n-2$ trojuholníkov pomocou $n-3$ rezov pozdĺž uhlopriečok, ktoré sa navzájom nepretínajú vo vnútri n-uholníka. Nech *dvojfarebná triangulácia* je také rozrezanie n-uholníka, v ktorom každý trojuholník je ofarbený čiernou alebo bielou farbou a každé dva trojuholníky so spoločnou stranou majú rôzne farby. Celé číslo $n \geqq 4$ nazývame *triangulárne*, ak pre pravidelný n-uholník existuje dvojfarebná triangulácia taká, že pre každý vrchol A daného n-uholníka je počet čiernych trojuholníkov s vrcholom A väčší ako počet bielych trojuholníkov s vrcholom A. Nájdite všetky triangulárne čísla. (*Chorvátsko*)

I-3. Daný je trojuholník ABC so stredom I kružnice vpísanej, pričom $|AB| < |AC|$. Označme E bod na strane AC taký, že $|AE| = |AB|$. Nech G je bod na priamke EI taký, že $|\measuredangle IBG| = |\measuredangle CBA|$ a bod I leží medzi bodmi E a G. Dokážte, že priamka AI, kolmica na AE v bode E a os uhla BGI sa pretínajú v jednom bode. (*Chorvátsko*)

I-4. Pre celé čísla $n \geqq k \geqq 0$ definujme *bibinomický koeficient* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ ako[1]

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Nájdite všetky dvojice (n, k) celých čísel $n \geqq k \geqq 0$ také, že prislúchajúci bibinomický koeficient je celé číslo. (*Rakúsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b+y},$$

kde a, b, x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce nerovnosti

$$\frac{1}{a+x} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+y} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b+x} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b+y} \geqq 1.$$

(*Maďarsko*)

[1] „Dvojitý“ faktoriál $n!!$ je definovaný ako súčin všetkých párnych čísel od 2 po n, ak n je párne, a ako súčin všetkých nepárnych čísel od 1 po n, ak n je nepárne. Napríklad $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$ a $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

T-2. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že

$$xf(xy)+xyf(x)\geqq f(x^2)f(y)+x^2y$$

platí pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$. (*Česká rep., Pavel Calábek*)

T-3. Nech K a L sú prirodzené čísla. Na šachovnici pozostávajúcej z $2K\times 2L$ políčok sa pohybuje mravec. Začína v ľavom dolnom políčku a presúva sa do pravého horného políčka. V každom kroku sa presunie na susedné políčko vo vodorovnom alebo zvislom smere a každé z políčok pri svojom presune navštívi nanajvýš raz. V niektorých prípadoch nenavštívené políčka tvoria obdĺžnik, ktorý nazývame MEMO*rovaný.* Určte počet všetkých rôznych MEMOrovaných obdĺžnikov. (Obdĺžniky sú rôzne, pokiaľ nepozostávajú z tých istých políčok.) (*Rakúsko*)

T-4. V Happy City je 2014 obyvateľov označených A_1, A_2, …, A_{2014}. V každom okamihu dňa je každý obyvateľ buď *šťastný* alebo *nešťastný.* Nálada obyvateľa A sa zmení (z nešťastnej na šťastnú alebo opačne) práve vtedy, ak sa usmeje nejaký iný šťastný obyvateľ na obyvateľa A. Na začiatku v Happy City bolo N šťastných obyvateľov. V pondelok počas dňa sa udialo nasledovné: obyvateľ A_1 sa usmial na obyvateľa A_2, potom sa obyvateľ A_2 usmial na obyvateľa A_3, atď. Nakoniec sa obyvateľ A_{2013} usmial na obyvateľa A_{2014}. Okrem toho sa nikto iný neusmial na nikoho iného. Rovnako to prebehlo aj v utorok, stredu a vo štvrtok. Na konci dňa vo štvrtok bolo v Happy City presne 2000 šťastných obyvateľov. Určte najväčšiu možnú hodnotu N.

(*Litva*)

T-5. Daný je trojuholník ABC, pre ktorý platí $|AB|<|AC|$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC so stredom I sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Priamka AI pretína priamky DE a DF postupne v bodoch X a Y. Označme Z pätu výšky z bodu A na stranu BC. Dokážte, že D je stred kružnice vpísanej trojuholníku XYZ. (*Nemecko*)

T-6. Kružnica k vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Nech $L\neq D$ je priesečník priamky AD a kružnice k a nech K je stred kružnice pripísanej k strane BC. Označme M a N postupne stredy úsečiek BC a KM. Dokážte, že body B, C, N a L ležia na jednej kružnici. (*Slovensko, Patrik Bak*)

T-7. Konečná množina A kladných celých čísel sa nazýva *priemerová*, ak pre každú jej neprázdnu podmnožinu je aritmetický priemer jej prvkov taktiež kladné celé číslo. Ináč povedané, A je priemerová, ak $(a_1+\ldots+a_k)/k$ je celé číslo pre každé $k\geqq 1$, kde $a_1,\ldots,a_k\in\mathsf{A}$ sú navzájom rôzne. Pre ľubovoľné celé číslo n určte najmenší možný súčet prvkov priemerovej n-prvkovej množiny. (*Rakúsko*)

T-8. Určte všetky štvorice (x,y,z,t) kladných celých čísel, pre ktoré platí

$$20^x+14^{2y}=(x+2y+z)^{zt}.$$

(*Litva*)