2007/2008
57. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v stredu 23. januára 2008.*)

1. Nájdite všetky štvorice p, q, r, s navzájom rôznych reálnych čísel, pre ktoré sú p, q koreňmi rovnice
$$x^2 + rx + s - 1 = 0$$
a r, s koreňmi rovnice
$$px^2 + p(q - 1)x + 12 = 0.$$
(*Tomáš Jurík*)

2. V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n + 1, n + 2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu), a ak je ich aritmetický priemer celé číslo, obe nahradíme týmto priemerom. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké? (*Peter Novotný*)

3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC. (*Ján Mazák*)

4. Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y spĺňajúce vzťah $x^2 + y^6 = 2$ platí
$$x^2 + 2 \geqq 3xy.$$
(*Ján Mazák*)