

2007/2008
57. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 1. apríla 2008.)

1. Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b . Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a + b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x , ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda. (Jaroslav Švrček)

2. V trojuholníku ABC má uhol α veľkosť 20° . Vypočítajte veľkosti uhlov β a γ , ak platí rovnosť $a + 2v_a = b + 2v_b$. (Pavel Novotný)

3. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD . Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD . Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD . (Jaroslav Švrček)

4. Hokejový turnaj sa hrá systémom „každý s každým“. V priebehu turnaja sa každá dvojica družstiev stretne práve raz. Turnaj sa odohráva po jednotlivých kolách. Pri párnom počte družstiev odohrá každé v jednom kole jedno stretnutie, pri nepárnom počte má v každom kole jedno družstvo voľno. Za remízu dostane každý zo súperov po jednom bode. Ak sa stretnutie neskončí remízou, dostane víťaz dva body, porazený nezíska žiadny bod. O poradí v tabuľke rozhoduje predovšetkým počet bodov, pri rovnosti bodov potom skóre. Po odohratí niekoľkých kôl nemala žiadna dvojica družstiev ten istý počet bodov. Dokážte, že v tom prípade už posledný v tabuľke stratil nádej na celkové prvenstvo. Úlohu riešte pre turnaj

- desiatich družstiev,
- jedenástich družstiev.

(Martin Panák)