2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc*

$$x(x-p)=3+q, \quad x(x+p)=3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je p, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2}\cdot\frac{3p}{2}=3-q. \tag{1}$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

$$-\frac{p}{2}\cdot\left(-\frac{3p}{2}\right)=3+q. \tag{2}$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme $3-q=3+q$, čiže $q=0$ a z (1) potom vyjde $p=2$ alebo $p=-2$.

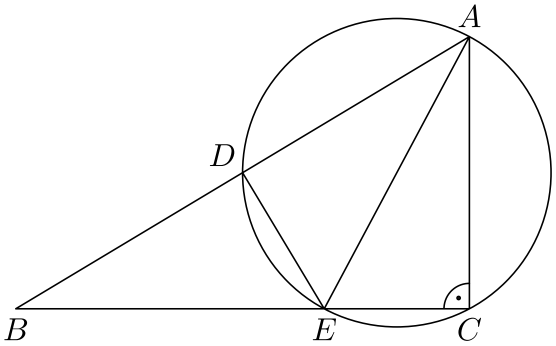
Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2)=3$, $x(x+2)=3$. Korene prvej z nich sú čísla -1 a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a -3, ich aritmetický priemer je -1.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dva body dajte za zistenie, že aritmetické priemery koreňov sú $\frac{1}{2}p$ a $-\frac{1}{2}p$, jeden bod za sústavu rovníc (1), (2), dva body za jej vyriešenie a jeden bod za overenie, že každá z rovníc $x(x-2)=3$, $x(x+2)=3$ má dva rôzne reálne korene.

---

2. *Dané sú dĺžky odvesien $a=|BC|$, $b=|AC|$ pravouhlého trojuholníka ABC, pričom $a>b$. Označme D stred prepony AB a E ($E\neq C$) priesečník strany BC s kružnicou opísanou trojuholníku ADC. Vypočítajte obsah trojuholníka EAD.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Označme c dĺžku prepony AB, takže $|AD|=|BD|=\frac{1}{2}c$. Štvoruholník $ADEC$ je tetivový a uhol ECA je pravý, preto aj protiľahlý uhol ADE je pravý (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky ABC a EBD majú uhol pri vrchole B spoločný, preto



Obr. 1

sú podobné. Odtiaľ

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a preto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravouhlého trojuholníka EAD je teda (s využitím Pytagorovej vety)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2 + b^2)}{8a}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho dva body za zistenie, že uhol ADE je pravý, jeden bod za podobnosť trojuholníkov ABC a EBD, jeden bod za výpočet dĺžky strany ED a dva body za dopočítanie obsahu trojuholníkov EAD.

---

3. *Určte všetky dvojice celých kladných čísel m, n, pre ktoré platí $37 + 27^m = n^3$.*
(*Martin Panák*)

Riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $37 = n^3 - 27^m$ a rozdiel tretích mocnín rozložíme na súčin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravej strane rovnosti je súčin dvoch celých čísel, pričom druhý činiteľ je väčší ako 1. Preto musí platiť

$$n - 3^m = 1 \tag{1}$$

a

$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{2}$$

Pre $m \geqq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$, takže ostáva jediná možnosť $m = 1$; z (1) potom vyplýva $n = 1 + 3^m = 4$. Skúškou sa presvedčíme, že $37 + 27^1 = 4^3$, alebo overíme, že dvojica $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje podmienke (2).

Iné riešenie. Ako v prvom riešení odvodíme sústavu rovníc (1), (2). Z (1) vyjadríme $3^m = n - 1$ a dosadíme do (2). Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} n^2 + n(n-1) + (n-1)^2 &= 37, \\ n^2 - n - 12 &= 0, \\ (n-4)(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

Táto rovnica má v obore celých kladných čísel jediné riešenie $n = 4$. Potom $3^m = n - 1 = 3$, takže $m = 1$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za úpravu rovnice na tvar $37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m)$ a 2 body za sústavu rovníc (1), (2). Pri prvom postupe dajte jeden bod za zdôvodnenie rovnosti $m = 1$ a jeden bod za určenie hodnoty n a za skúšku správnosti. Pri druhom postupe jeden bod za určenie $n = 4$ a jeden bod za dopočítanie hodnoty m; pri tomto postupe skúška správnosti nie je nutná. Iba za uhádnutie riešenia nedávajte žiadny bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.