

2007/2008

57. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 1. apríla 2008.)

1. Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leq b \leq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB , BC a AC postupne v bodoch K , L a M . Dokážte, že z úsečiek AK , BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b + c < 3a$.
(Jaroslav Švrček)

2. Klárka urobila chybu pri písomnom násobení dvoch dvojčiferných čísel, a tak jej vyšlo číslo o 400 menšie, ako bol správny výsledok. Pre kontrolu vydela číslo, ktoré dostala, menším z násobených čísel. Tentoraz počítala správne a vyšiel jej neúplný podiel 67 a zvyšok 56. Ktoré čísla Klárka násobila?
(Jaromír Šimša)

3. Dokážte, že pokiaľ v skupine šiestich osôb existuje aspoň desať dvojíc známych, tak v nej možno nájsť tri osoby, ktoré sa poznajú navzájom. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný, t. j. ak osoba A pozná osobu B , tak aj B pozná A . Ukážte, že taká trojica existovať nemusí, ak v skupine šiestich osôb je menej ako desať dvojíc známych.
(Vojtech Bálint)

4. Nájdite všetky trojice celých čísel x , y , z , pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

(Ján Mazák)