2007/2008
57. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 13. – 16. 4. 2008.*)

1. Určte koeficienty p, q, r polynómu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, ak viete, že sú to nenulové navzájom rôzne celé čísla a že $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$. (*Vojtech Bálint*)

2. V ostrouhlom trojuholníku ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$, označme D a E päty výšok z vrcholov A a B. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC, bod F je priesečník priamok AB a DE a bod S je stred strany AB. Ďalej nech K je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BDS a AES rôzny od bodu S.

a) Dokážte, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici.

b) Dokážte, že body F, V, K ležia na jednej priamke. (*Ján Mazák*)

3. V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n + 1, n + 2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu) a buď obidve súčasne zväčšiť o 1 alebo obidve súčasne zmenšiť o 1. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovné 365? (*Peter Novotný*)

4. Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslom. (*Ján Mazák*)

5. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je 1. Dokážte, že ak k, m sú kladné celé čísla, pričom $k > m$, tak

$$x^k + y^k + z^k \geqq x^m + y^m + z^m.$$

(*Pavel Novotný*)

6. Označme zvyčajným spôsobom dĺžky strán a ťažníc daného trojuholníka. Nájdite všetky možné hodnoty výrazu

$$\text{a)} \quad \frac{t_a^2 - t_b^2}{b^2 - a^2}; \qquad\qquad \text{b)} \quad \frac{t_a - t_b}{b - a}.$$

(*Pavel Novotný*)