2006/2007
56. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v piatok 24. novembra 2006.*)

1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.
(*Jaromír Šimša*)

2. Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné. (*Peter Novotný*)

3. Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spĺňajúce podmienku $xy + yz + zx = 1$, tak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$ dá rozdeliť

a) na dve,

b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov. (*Peter Novotný*)

5. V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k.
(*Jiří Dula*)

6. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

(*Petr Kaňovský*)