64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

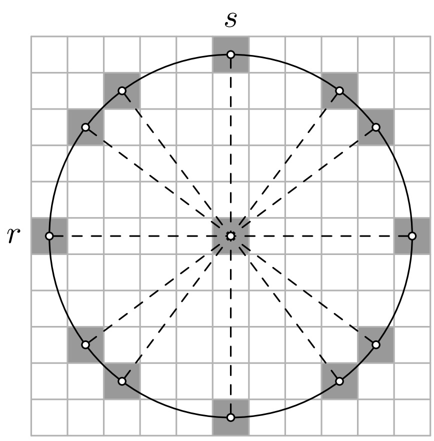
Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1. *Dané je prirodzené číslo n. Štvorec so stranou dĺžky n je rozdelený na n^2 jednotkových štvorčekov. Za vzdialenosť dvoch štvorčekov považujeme vzdialenosť ich stredov. Určte počet dvojíc štvorčekov, ktorých vzdialenosť je 5.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Polohu jednotkových štvorčekov budeme v riešení vyjadrovať súradnicami – štvorček v r-tom riadku a s-tom stĺpci označíme (r,s). Ľahko možno s využitím Pytagorovej vety nahliadnuť (obr. 1), že štvorček (r,s) má vzdialenosť 5 práve od štvorčekov

$$\begin{gathered}(r,s+5),\ (r+5,s),\ (r+3,s+4),\ (r+4,s+3),\ (r+3,s-4),\ (r+4,s-3),\\ (r,s-5),\ (r-5,s),\ (r-3,s-4),\ (r-4,s-3),\ (r-3,s+4),\ (r-4,s+3).\end{gathered} \tag{1}$$

Spolu tak máme nanajvýš 12 možností; menej ich je v prípade, keď niektoré zo súradníc zodpovedajú polohe mimo štvorca $n \times n$, t. j. keď neležia v množine $\{1, 2, \dots, n\}$.



Obr. 1

Spočítajme najskôr, koľko existuje dvojíc štvorčekov typu $\{(r,s),(r,s+5)\}$, teda „vodorovných“ dvojíc. Ak $n \geqq 5$, v každom z n riadkov ich je $n-5$, pretože pre pevné r môže s nadobúdať hodnoty 1, 2, …, $n-5$. Spolu je „vodorovných“ dvojíc $n(n-5)$. Vzhľadom na symetriu je toľko isto aj „zvislých“ dvojíc.

Dvojíc štvorčekov typu $\{(r,s),(r+3,s+4)\}$ je spolu $(n-4)(n-3)$ (pokiaľ $n \geqq 4$), pretože r môže nadobúdať hodnoty 1, 2, …, $n-3$ a s hodnoty 1, 2, …, $n-4$. Zo symetrie dostávame, že toľko isto je aj dvojíc štvorčekov typu $\{(r,s),(r+4,s+3)\}$, $\{(r,s),(r+3,s-4)\}$ a $\{(r,s),(r+4,s-3)\}$.

Keďže sa zaujímame o počet neusporiadaných dvojíc štvorčekov, ostatné možnosti z (1) už započítavať nebudeme (inak by sme každú dvojicu započítali dvakrát). Spolu je teda hľadaný počet dvojíc štvorčekov v prípade $n \geqq 5$ rovný

$$2n(n-5) + 4(n-4)(n-3) = 2(3n^2 - 19n + 24).$$

Pre $n \leqq 4$ je hľadaný počet zrejme rovný 0.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj nasledovne: Do každého štvorčeka veľkého štvorca vpíšeme číslo udávajúce počet štvorčekov, ktoré od neho majú vzdialenosť 5. Pre výsledok stačí sčítať všetky vpísané čísla a súčet vydeliť dvoma (každá dvojica štvorčekov je v súčte započítaná dvakrát). Pritom ak je štvorček od okrajových štvorčekov štvorca vzdialený aspoň 5 (teda jeho súradnice (r, s) spĺňajú $6 \leqq r, s \leqq n-5$), je v ňom napísané číslo 12. Stačí teda vyšetriť čísla blízko okrajov štvorca, a špeciálne blízko rohov štvorca.

4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4

Obr. 2

Nevýhodou tohto prístupu je, že je nutné osobitne vyšetriť situácie $n \leqq 9$, kedy okrajové oblasti majú menší rozmer ako vo všeobecnom prípade $n \geqq 10$, pre ktorý je situácia znázornená na obr. 2. Pre $n \geqq 10$ je výsledný počet dvojíc rovný

$$\frac{1}{2}\left(12(n-10)^2 + 4(n-10)(11+9+3\cdot 7) + 4(10+2\cdot 8+7\cdot 6+6\cdot 5+9\cdot 4)\right)$$

a podobné vyjadrenia (už bez premennej n) vyplývajúce z obr. 3a až 3e možno napísať pre jednotlivé prípady $n \in \{9, 8, 7, 6, 5\}$. Dá sa overiť (a vyplýva to z predošlého riešenia), že všetky tieto vyjadrenia sa dajú reprezentovať jedným vzorcom $2(3n^2 - 19n + 24)$.

4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
5	5	5	6	7	6	5	5	5
5	5	5	7	8	7	5	5	5
5	5	5	6	7	6	5	5	5
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4

Obr. 3a

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4

Obr. 3b

4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4
3	3	2	2	2	3	3
3	3	2	0	2	3	3
3	3	2	2	2	3	3
4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4

Obr. 3c

4	3	2	2	3	4
3	2	1	1	2	3
2	1	0	0	1	2
2	1	0	0	1	2
3	2	1	1	2	3
4	3	2	2	3	4

Obr. 3d

2	1	0	1	2
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	1	0	1	2

Obr. 3e

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Koľko je vo štvorci $n \times n$ dvojíc štvorčekov, ktorých vzdialenosť je 2? [Ak $n \geqq 2$, v každom riadku ich je $n-2$, rovnako v každom stĺpci. Spolu ich je $2n(n-2)$.]

N2. Koľko je vo štvorci $n \times n$ dvojíc štvorčekov, ktorých vzdialenosť je $\sqrt{5}$ [Pre $n \geqq 2$ ich je $4(n-1)(n-2)$.]?

D1. Určte počet dvojíc (a, b) prirodzených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi. [51–C–II–1]

D2. Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.) [62–C–I–1]

---

2. *Daný je trojuholník ABC, v ktorom je BC najkratšia strana. Jej stred označme M. Na stranách AB a AC určíme postupne body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Priesečník priamok CX a BY označme Z. Dokážte, že priamka ZM prechádza stredom kružnice pripísanej ku strane BC daného trojuholníka.* (*Michal Rolínek*)

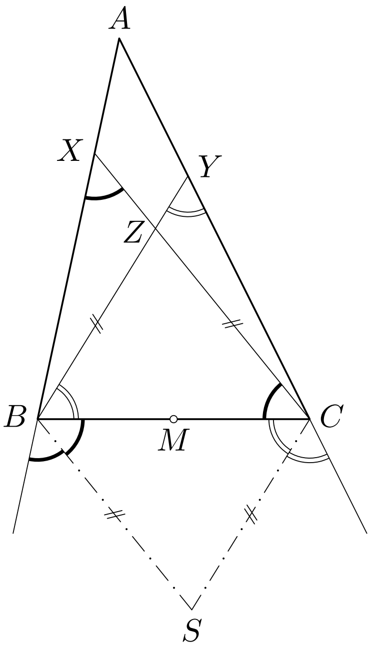
Riešenie. Označme S stred kružnice pripísanej k strane BC. Bod S leží na osiach vonkajších uhlov pri vrcholoch B, C daného trojuholníka. Ak teda veľkosti uhlov v trojuholníku ABC označíme zvyčajným spôsobom, platí

$$|\measuredangle CBS| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Podľa zadania je trojuholník CXB rovnoramenný so základňou CX. Keďže pri jeho hlavnom vrchole B má vnútorný uhol veľkosť β, pre veľkosť uhla pri základni platí rovnosť

$$2 \cdot |\measuredangle BCX| + \beta = 180^\circ, \qquad \text{odkiaľ} \qquad |\measuredangle BCX| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Dokázali sme tak, že $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle BCX|$, z čoho vzhľadom na vlastnosti súhlasných uhlov vyplýva, že priamky BS a XC sú rovnobežné (obr. 4).



Obr. 4

Zrejme analogickým postupom možno odvodiť rovnobežnosť priamok CS a YB, takže štvoruholník $BSCZ$ je rovnobežník. Keďže bod M je stredom jeho uhlopriečky BC, musí byť aj stredom jeho druhej uhlopriečky SZ, teda body Z, M, S ležia na jednej priamke, čo bolo treba dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme S, T U postupne stredy kružníc pripísaných k stranám BC, CA, AB daného trojuholníka ABC. Dokážte, že trojuholníky SBC, ATC, ABU sú podobné. [Trojuholníky sú podobné podľa vety uu; veľkosti ich vnútorných uhlov sú $90° - \frac{1}{2}\alpha$, $90° - \frac{1}{2}\beta$, $90° - \frac{1}{2}\gamma$.]

N2. V danom štvoruholníku $ABCD$ označme postupne K, L, M, N stredy strán AB, BC, CD, DA. Dokážte, že stred úsečky KM leží na priamke LN. Úsečky KL a NM sú stredné priečky trojuholníkov ACB a ACD, sú teda rovnobežné s AC, čiže aj navzájom. Podobne $LM \parallel KN$. Takže $KLMN$ je rovnobežník a stredy úsečiek KM, LN sú totožné.]

D1. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 36°$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk. [53–B–I–2]

D2. Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]

---

3. *Nájdite všetky celé čísla $k \geqq 2$, pre ktoré existuje k-prvková množina M celých kladných čísel taká, že súčin všetkých čísel z M je deliteľný súčtom ľubovoľných dvoch (rôznych) čísel z M.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že vyhovuje každé $k \geqq 2$. Snažíme sa teda zostrojiť k-prvkovú množinu prirodzených čísel $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ takú, že pre ľubovoľné indexy i, j spĺňajúce $1 \leqq i < j \leqq k$ platí $n_i + n_j \mid n_1 n_2 \ldots n_k$. Konštrukciu vyhovujúcej množiny založíme na postupe, pri ktorom začneme s ľubovoľnou k-prvkovou množinou a pokúsime sa ju zmeniť na vyhovujúcu.

Uvažujme najskôr jednoduchý prípad $k = 2$ a začnime s množinou $\{1, 2\}$. Súčin jej prvkov je rovný 2, zatiaľ čo jediný možný súčet jej dvoch rôznych prvkov je $1 + 2 = 3 \nmid 2$, teda množina nevyhovuje. Ak však každý jej prvok vynásobíme číslom 3 (teda číslom, ktoré „zapríčinilo“, že množina nevyhovuje), dostaneme vyhovujúcu množinu $\{3, 6\}$, pretože $3 + 6 = 9 \mid 3 \cdot 6$.

Podobne ak v prípade $k = 3$ začneme s množinou $\{1, 2, 3\}$ so súčinom prvkov 6, obdržíme „nevyhovujúce“ súčty $1+3 = 4 \nmid 6$, $2+3 = 5 \nmid 6$. Keď vynásobíme všetky prvky množiny číslom $4 \cdot 5 = 20$, dostaneme vyhovujúcu množinu $\{20, 40, 60\}$.[1] Rovnako by množina vyhovovala aj v prípade, že by sme čísla vynásobili nejakým väčším násobkom čísla 20.

Načrtnutý postup teraz zovšeobecníme pre ľubovoľné $k \geqq 2$. Začnime s množinou $\{1, 2, \ldots, k\}$. Chceme všetky jej prvky vynásobiť takým číslom N, ktoré je násobkom tých súčtov $i + j$ (pre $1 \leqq i < j \leqq k$), ktoré nedelia súčin $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k = k!$. Keďže $i + j \leqq 2k - 1$, stačí napríklad položiť $N = (2k - 1)!$ (číslo N tak bude násobkom všetkých možných súčtov $i + j$, nie len takých, ktoré nedelia $k!$, na to, či výsledná množina vyhovuje, to však nemá vplyv).

Zostrojili sme teda množinu

$$\big\{(2k-1)!, 2 \cdot (2k-1)!, \ldots, k \cdot (2k-1)!\big\},$$

o ktorej ukážeme, že vyhovuje podmienkam úlohy. Pre každé i, j spĺňajúce $1 \leqq i < j \leqq k$ totiž platí $i + j \mid (2k - 1)!$, a teda (vzhľadom na $k \geqq 2$) aj

$$i \cdot (2k-1)! + j \cdot (2k-1)! = (i + j) \cdot (2k-1)! \mid k!((2k-1)!)^k.$$

Poznámka. Uvedený postup možno všeobecnejšie aplikovať pre ľubovoľnú počiatočnú k-ticu rôznych prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Označme N *ľubovoľný* spoločný násobok všetkých $\binom{k}{2}$ čísel $a_i + a_j$, pričom $1 \leqq i < j \leqq k$ (môžeme napríklad za N zobrať ich *najmenší* spoločný násobok). Potom k-prvková množina

$$\big\{Na_1, Na_2, \ldots, Na_k\big\}$$

má požadovanú vlastnosť, lebo súčin všetkých jej prvkov je deliteľný číslom N^k, zatiaľ čo súčet ľubovoľných dvoch jej prvkov je deliteľom čísla N^2. Posledné tvrdenie platí vďaka tomu, že z podmienky $(a_i + a_j) \mid N$ vyplýva

$$Na_i + Na_j = N(a_i + a_j) \mid N^2.$$

Iné riešenie. Pre $k = 2$ a $k = 3$ možno skúšaním alebo postupom z úvodu prvého riešenia objaviť vyhovujúce množiny, napr. $\{3, 6\}$ a $\{3, 12, 15\}$. Ukážeme, že pre každé $k \geqq 4$ je vyhovujúcou množina $M = \{2, 6, 10, \ldots, 4k - 2\}$, teda množina dvojnásobkov prvých k nepárnych prirodzených čísel. Súčin prvkov tejto množiny je

$$2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1). \tag{1}$$

Súčet i-teho a j-teho prvku množiny M (pre $1 \leqq i < j \leqq k$) je rovný

$$2(2i-1) + 2(2j-1) = 4i + 4j - 4 = 4(i + j - 1) = 4 \cdot 2^\alpha \cdot n,$$

kde n je najväčší nepárny deliteľ čísla $i + j - 1$ a α je exponent čísla 2 v prvočíselnom rozklade čísla $i + j - 1$. Keďže $1 \leqq n \leqq i + j - 1 \leqq 2k - 2$, nachádza sa činiteľ n v súčine $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)$. Matematickou indukciou možno ľahko pre $k \geqq 4$ dokázať nerovnosť $2^{k-1} > 2k - 1$, z čoho vyplýva $\alpha \leqq k - 2$ (lebo $2^\alpha \mid i + j - 1 < 2k - 1$). Preto $4 \cdot 2^\alpha \mid 2^k$. Spolu tak dostávame, že $4 \cdot 2^\alpha \cdot n$ delí súčin (1), čo sme chceli dokázať.

[1] Pre splnenie podmienok zadania by dokonca stačilo prvky vynásobiť číslom $2 \cdot 5 = 10$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že ak pre prirodzené čísla a, b, c, d platí $a \mid c$ a $b \mid d$, tak $ab \mid cd$. [Z predpokladov vyplýva, že zlomky c/a, d/b sú celé čísla, takže aj ich súčin $(cd)/(ab)$ je celé číslo.]

N2. Dokážte, že ak prirodzené čísla a, b sú nesúdeliteľné, tak $a + b \nmid ab$. [Ak $\text{nsd}(a, b) = 1$, tak aj $\text{nsd}(a+b, a) = \text{nsd}(a+b-a, a) = \text{nsd}(a, b) = 1$. Podobne $\text{nsd}(a+b, b) = 1$. Odtiaľ $\text{nsd}(a + b, ab) = 1$, takže zlomok $ab/(a + b)$ je v základnom tvare a keďže $a + b > 1$, nie je celým číslom.]

N3. Dokážte, že žiadna trojprvková množina vyhovujúca zadaniu neobsahuje číslo 1. [Sporom nech množina $\{1, a, b\}$ vyhovuje. Potom $a+1 \mid ab$, a keďže $\text{nsd}(a+1, a) = 1$, nutne $a + 1 \mid b$, čiže $a < b$. Analogicky $b < a$, čím dostávame spor.]

N4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje k po sebe idúcich prirodzených čísel, medzi ktorými nie je žiadne prvočíslo. [Vyhovuje napr. k-tica $(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, \dots , (k + 1)! + (k + 1)$.]

D1. Dokážte, že existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 2$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel. Rozhodnite, či existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé celé číslo $k \geqq 0$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel. [46–A–III–4]

D2. Dokážte matematickou indukciou pre $k \geqq 4$ nerovnosť $2^{k-1} > 2k - 1$.

D3. Ukážte, že pre každé celé $k \geqq 2$ možno vybrať k rôznych prirodzených čísel tak, aby ich súčin bol deliteľný každým číslom, ktoré je súčtom niekoľkých z vybraných čísel (nie nutne dvoch ako v súťažnej úlohe). [Ľubovoľne zvolenú k-ticu čísel $a_1, a_2, \dots , a_k$ zameníme za k-ticu $Na_1, Na_2, \dots , Na_k$, pričom N je spoločný násobok všetkých $2^k - k - 1$ súčtov $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_r}$ $(2 \leqq r \leqq k)$.]

---

4. *Predpokladajme, že pre reálne čísla x, y, z platí*

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že aspoň jedno z nich je rôzne od nuly.

a) Dokážte rovnosť $x + y + z = 4$.

b) Nájdite najmenší interval $\langle a, b\rangle$, v ktorom ležia všetky tri čísla z ľubovoľnej trojice (x, y, z) vyhovujúcej predpokladom úlohy.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. a) Hodnotu, ktorej sa rovnajú tri výrazy uvedené v zadaní, označme a. Platí teda

$$x + y + z = \tfrac{1}{15}a, \qquad xy + yz + zx = \tfrac{1}{12}a, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{10}a.$$

Po dosadení do známeho vzťahu $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ a následných úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{15}a\right)^2 &= \tfrac{1}{10}a + 2 \cdot \tfrac{1}{12}a, \\ \tfrac{1}{225}a^2 &= \tfrac{4}{15}a, \\ a(a - 60) &= 0. \end{aligned}$$

Aspoň jedno z čísel x, y, z je nenulové, preto $a = 10(x^2 + y^2 + z^2) > 0$. Nutne teda $a = 60$, čiže $x + y + z = 60/15 = 4$.

b) Z prvej časti vyplýva tiež $xy + yz + zx = 60/12 = 5$. Táto rovnosť spolu s rovnosťou $x + y + z = 4$ sú zrejme ekvivalentným prepisom predpokladov zo zadania. Zapíšeme ich v tvare

$$\begin{aligned} x + y &= 4 - z, \\ xy &= 5 - z(x + y) = 5 - z(4 - z) = z^2 - 4z + 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Podľa Viètových vzťahov sú x, y koreňmi kvadratickej rovnice

$$t^2 + (z-4)t + z^2 - 4z + 5 = 0 \tag{2}$$

s neznámou t a diskriminantom

$$D = (z-4)^2 - 4(z^2 - 4z + 5) = -3z^2 + 8z - 4 = -(3z-2)(z-2).$$

Reálne hodnoty x, y spĺňajúce (1) existujú práve vtedy, keď je tento diskriminant nezáporný, teda keď $\frac{2}{3} \leqq z \leqq 2$. Vzhľadom na symetriu rovnaké podmienky platia pre premenné x, y. Hľadaný najmenší interval je preto $\langle \frac{2}{3}, 2 \rangle$.

Poznámka. V uvedenom riešení sme predpoklady úlohy nahrádzali ekvivalentnými podmienkami. V prípade, že by sme robili len dôsledkové úpravy, na záver by sme ešte museli ukázať, že pre krajné hodnoty $z = \frac{2}{3}$, resp. $z = 2$ naozaj existujú hodnoty x, y spĺňajúce zadanie. Tie dostaneme jednoduchým dopočítaním dvojnásobných koreňov kvadratickej rovnice (2) (keďže diskriminant je pre uvedené hodnoty z nulový). Prislúchajúce trojice (x, y, z) sú $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a $(1, 1, 2)$.

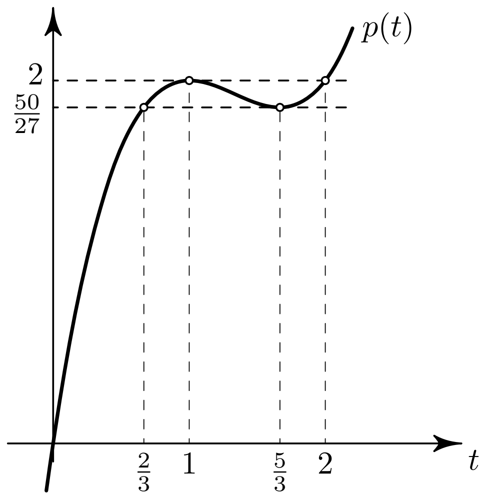
Iné riešenie. (Len časť b).) Ak objavíme vyhovujúce trojice $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a $(1, 1, 2)$, možno dolné a horné ohraničenie pre premennú z odvodiť úpravou nasledujúcich zrejmých nerovností (využijúc pritom vzťahy $x + y + z = 4$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 60/10 = 6$):

$$\begin{aligned}
\left(x - \tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 &\geqq 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}(x + y + z) + 2z + \frac{54}{9} &\geqq 0,\\
6 - \frac{40}{3} + 2z + \frac{54}{9} &\geqq 0,\\
z &\geqq \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &\geqq 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 2z + 6 &\geqq 0,\\
6 - 8 - 2z + 6 &\geqq 0,\\
2 &\geqq z.
\end{aligned}$$

Poznámka. Ak reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnosti $x+y+z = 4$ a $xy+yz+zx = 5$, podľa Viètových vzťahov sú trojicou koreňov mnohočlena tretieho stupňa $t^3 - 4t^2 + 5t - c$, pričom $c = xyz$. Označme $p(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$. Rovnica $p(t) = c$ má tri reálne korene práve vtedy, keď graf konštantnej funkcie s hodnotou c pretína graf funkcie $p(t)$ v troch bodoch; v hraničných prípadoch sa grafu dotýka, čo zodpovedá dvojnásobným koreňom mnohočlena $p(t) - c$.



Obr. 5

Z obr. 5 je potom vidieť, aké hodnoty môžu nadobúdať x, y, z, špeciálne aj ohraničenie $\frac{2}{3} \leqq x, y, z \leqq 2$. Samozrejme, pri takomto postupe pre korektné riešenie treba vypočítať, v ktorých bodoch funkcia $p(t)$ nadobúda lokálne extrémy a následne dopočítať priesečníky príslušných priamok s jej grafom. Na obr. 5 je len grafické zhrnutie takého postupu.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Rovnica $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$ má tri reálne korene. Aký je súčet ich druhých mocnín? [Ak a, b, c sú korene danej rovnice, tak podľa Viètových vzťahov platí $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 2$, a teda $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$.]

N2. Súčin dvoch reálnych čísel je dvojnásobkom ich súčtu. Aký môže byť ich súčet? [Ak $a + b = p$ a $ab = 2p$, tak po vyjadrení $b = p - a$ a dosadení do druhej rovnice máme $a^2 - ap + 2p = 0$, čo je kvadratická rovnica s diskriminantom $p^2 - 8p$. Ten je nezáporný (a teda existuje reálne riešenie) práve vtedy, keď $p \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 8, \infty)$.]

D1. Dokážte, že ak pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, tak

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geqq 1.$$

[46–A–S–3]

D2. Určte všetky trojice reálnych čísel a, b, c, ktoré spĺňajú podmienky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

[62–A–S–3]

D3. Nájdite všetky možné hodnoty súčtu $x + y$, kde reálne čísla x, y spĺňajú rovnosť $x^3 + y^3 = 3xy$. [48–B–I–6]

D4. Predpokladajme, že pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a + b + c + d$ a zistite, ktoré vyhovujúce štvorice a, b, c, d ju dosahujú. [61–A–II–4]

D5. Predpokladajme, že reálne čísla x, y, z vyhovujú sústave rovníc

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokážte, že potom platí nasledujúce tvrdenie: a) Každé z čísel xy, yz, zx je aspoň 9, avšak nanajvýš 25. b) Niektoré z čísel x, y, z je nanajvýš 3 a iné z nich je aspoň 5. [60–A–III–3]

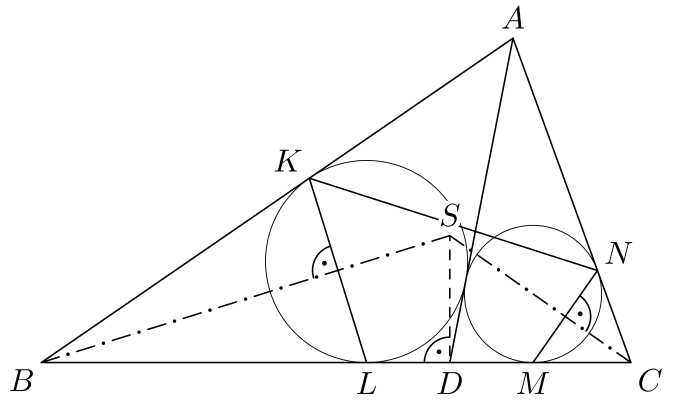
5. *V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L. Kružnica vpísaná do trojuholníka ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N. Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Na úvod si pripomeňme známe tvrdenie: Ak D, E, F sú body dotyku kružnice vpísanej do trojuholníka ABC postupne so stranami BC, CA, AB a dĺžky strán sú označené ako zvyčajne, tak

$$|AE| = |AF| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |BF| = |BD| = \frac{c+a-b}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a+b-c}{2}.$$

Toto tvrdenie sme sformulovali len pre trojuholník ABC, v riešení ho však budeme využívať aj pre trojuholníky ABD a ACD.

Na dôkaz toho, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový, stačí ukázať, že osi troch jeho strán sa pretínajú v jednom bode.[2] Pritom osi jeho strán KL a MN sú zároveň osami vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch B a C, pretože trojuholníky LKB, MNC sú rovnoramenné so základňami LK, MN. Tieto osi sa pretínajú v strede kružnice vpísanej do trojuholníka ABC, ktorý označme S (obr. 6). Dokážeme, že týmto bodom prechádza aj os strany LM.



Obr. 6

Keďže polomer SD vpísanej kružnice je kolmý na dotýkajúcu sa stranu BC, potrebujeme dokázať, že D je stredom úsečky LM (potom SD bude jej osou). Na to využijeme úvodné tvrdenie. Jeho aplikáciou na trojuholník ABD a úsek DL a následne na trojuholník ABC a úsek BD dostaneme

$$|DL| = \frac{|BD| + |AD| - |AB|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(c+a-b) + |AD| - c}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a-b-c) + |AD|}{2}.$$

Podobne máme

$$|DM| = \frac{|CD| + |AD| - |AC|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+b-c) + |AD| - b}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a-b-c) + |AD|}{2}.$$

[2] Taký priesečník má totiž rovnakú vzdialenosť od všetkých štyroch vrcholov a teda existuje kružnica, ktorá v ňom má stred a prechádza všetkými štyrmi vrcholmi.

Keďže $|DL| = |DM|$, je D naozaj stredom úsečky LM, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Z faktu, že $|DL| = |DM|$, o. i. vyplýva aj to, že kružnice vpísané trojuholníkom ABD a ADC sa dotýkajú úsečky AD v tom istom bode.

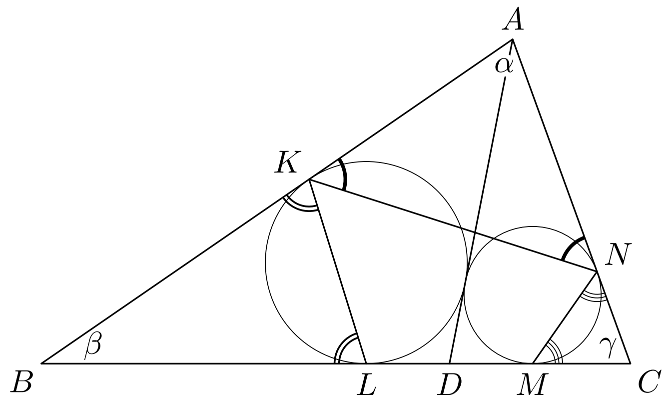
Iné riešenie. Opäť viackrát využijeme tvrdenie z úvodu prvého riešenia. Podľa neho pre dĺžku úseku AK v trojuholníku ABD máme

$$|AK| = \frac{|AB| + |AD| - |BD|}{2} = \frac{c + |AD| - \frac{1}{2}(c + a - b)}{2} = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b + c - a)}{2}$$

a podobne

$$|AN| = \frac{|AC| + |AD| - |CD|}{2} = \frac{b + |AD| - \frac{1}{2}(a + b - c)}{2} = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b + c - a)}{2}.$$

Keďže $|AK| = |AN|$, je trojuholník KNA rovnoramenný (obr. 7), čiže $|\measuredangle ANK| =$



Obr. 7

$= 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Z rovnoramenných trojuholníkov LKB, MNC máme $|\measuredangle BLK| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\measuredangle MNC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Na základe toho jednoducho vyjadríme

$$|\measuredangle KLM| = 180° - |\measuredangle BLK| = 90° + \tfrac{1}{2}\beta,$$
$$|\measuredangle MNK| = 180° - |\measuredangle MNC| - |\measuredangle ANK| = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma,$$

odkiaľ $|\measuredangle KLM| + |\measuredangle MNK| = 90° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, z čoho už priamo vyplýva, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech P je bod ležiaci zvonka danej kružnice k. Týmto bodom vedieme dotyčnice, ktoré sa kružnice k dotýkajú postupne v bodoch U, V. Dokážte, že $|PU| = |PV|$. [Vyplýva to zo súmernosti podľa priamky PS, kde S je stred kružnice k.]

N2. Dokážte tvrdenie z úvodu riešenia, t. j. dokážte, že ak D, E, F sú body dotyku kružnice vpísanej do trojuholníka ABC s jeho stranami, tak $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$ (pričom $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$). [Rovnosti $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$, $|CD| = |CE|$ vyplývajú z predošlej návodnej úlohy. Ak dĺžky týchto úsekov označíme x, y, z, dostaneme sústavu $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, ktorej riešením dostaneme vyjadrenia $x = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$.]

N3. Dokážte, že ak sa osi niektorých troch strán štvoruholníka pretínajú v jednom bode, tak je tento štvoruholník tetivový. [Poz. poznámku pod čiarou v riešení úlohy.]

N4. Nech D, E, F sú body dotyku kružnice vpísanej do trojuholníka ABC s jeho stranami. Dokážte, že trojuholník DEF je ostrouhlý. [Veľkosti uhlov trojuholníka DEF sú $90° - \frac{1}{2}\alpha$, $90° - \frac{1}{2}\beta$, $90° - \frac{1}{2}\gamma$, čo sú všetko ostré uhly.]

D1. Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokážte. [49–A–I–2]

D2. Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej. [63–B–S–3]

---

6. *Nech a, b sú dané navzájom nesúdeliteľné prirodzené čísla. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel je zostavená tak, že pre každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokážte, že v ľubovoľnej takej postupnosti každý člen x_n s indexom $n > 1$ delí nekonečne veľa jej ďalších členov. Platí toto tvrdenie aj pre $n = 1$?* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že pre každé $n > 1$ existuje $k > 0$ také, že $x_n \mid x_{n+k}$. Z toho potom nutne vyplýva, že každý člen postupnosti (s prípadnou výnimkou prvého člena) delí nekonečne veľa ďalších členov, pretože opakované použitie tohto tvrdenia zaručuje existenciu nekonečnej postupnosti relácií

$$x_n \mid x_{n+k_1} \mid x_{n+k_1+k_2} \mid x_{n+k_1+k_2+k_3} \mid \ldots$$

Nech teda $n > 1$ je pevné. Vyjadrime nasledujúce členy pomocou parametrov a, b a x_n. Používaním zadaného predpisu postupne dostaneme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b, \\ x_{n+2} &= a(ax_n + b) + b = a^2 x_n + b(1 + a), \\ x_{n+3} &= a(a^2 x_n + b + ba) + b = a^3 x_n + b(1 + a + a^2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Všeobecne pre každé celé $k > 0$ platí

$$x_{n+k} = a^k x_n + b(1 + a + \ldots + a^{k-1}),$$

čo sa dá formálne dokázať triviálne matematickou indukciou. Preto želaná vlastnosť $x_n \mid x_{n+k}$ je ekvivalentná s podmienkou $x_n \mid b(1+a+\ldots+a^{k-1})$. Ukážeme, že existuje k, pre ktoré

$$x_n \mid 1 + a + \ldots + a^{k-1}, \tag{1}$$

čím bude zaručené, že x_n delí x_{n+k}.

Uvažujme postupnosť

$$1, \quad 1 + a, \quad 1 + a + a^2, \quad 1 + a + a^2 + a^3, \quad \ldots,$$

t. j. postupnosť čísel $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ s predpisom $s_k = 1 + a + \ldots + a^{k-1}$. V tejto nekonečnej postupnosti určite existujú dva členy, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom x_n, pretože možných zvyškov je len konečne veľa. Povedzme, že sú to členy s_{k_1} a s_{k_2}, pričom $k_1 < k_2$. Rozdiel $s_{k_2} - s_{k_1}$ je potom deliteľný číslom x_n, čiže

$$x_n \mid (1 + a + \ldots + a^{k_2-1}) - (1 + a + \ldots + a^{k_1-1}) = a^{k_1}(1 + a + \ldots + a^{k_2-k_1-1}). \quad (2)$$

Čísla a, b sú nesúdeliteľné, preto číslo $x_n = ax_{n-1} + b$ je nesúdeliteľné s a (žiadny netriviálny deliteľ čísla a nedelí b, a teda nedelí ani $ax_{n-1} + b$), čiže aj x_n a a^{k_1} sú nesúdeliteľné. Z (2) preto vyplýva

$$x_n \mid 1 + a + \ldots + a^{k_2-k_1-1},$$

čím sme dokázali platnosť (1) pre $k = k_2 - k_1 > 0$.

Tvrdenie o člene x_1 vo všeobecnosti neplatí, čísla x_1 a a totiž nemusia byť nesúdeliteľné (čo bola v predošlom postupe jediná podmienka na to, aby sme našli $k > 0$ také, že $x_n \mid x_{n+k}$). Naozaj, ak napríklad zvolíme $a > 1$ a $x_1 = a$, bude každý ďalší člen x_n pre $n > 1$ tvaru $ax_{n-1} + b$, teda bude s členom $x_1 = a > 1$ nesúdeliteľný (rovnako ako dané b), t. j. $x_1 \nmid x_n$.

Iné riešenie. Odlišným spôsobom dokážeme, že pre každé $n > 1$ existuje $k > 0$, pre ktoré platí (1). Podobne ako v predošlom riešení odvodíme, že čísla x_n a a sú nesúdeliteľné. Podľa Eulerovej vety je potom postupnosť zvyškov čísel $1, a, a^2, a^3, \ldots$ po delení číslom x_n periodická od prvého člena, pričom dĺžka periódy (nie nutne najkratšej) je $\varphi(x_n)$.[3]

Pre zjednodušenie zápisu označme $\varphi(x_n) = r$. Vzhľadom na uvedené platí

$$\begin{aligned}
1 &\equiv a^r &&\equiv a^{2r} &&\equiv \cdots \equiv a^{(x_n-1)\cdot r} && \pmod{x_n},\\
a &\equiv a^{r+1} &&\equiv a^{2r+1} &&\equiv \cdots \equiv a^{(x_n-1)\cdot r+1} && \pmod{x_n},\\
&\vdots\\
a^{r-1} &\equiv a^{2r-1} &&\equiv a^{3r-1} &&\equiv \cdots \equiv a^{x_n\cdot r-1} && \pmod{x_n}.
\end{aligned}$$

Preto súčet všetkých vypísaných mocnín čísla a (ktorých je x_n v každom riadku) je kongruentný modulo x_n s x_n-násobkom súčtu r mocnín vybraných po jednej z každého riadku. Akýkoľvek x_n-násobok je však kongruentný s nulou, a tak je platnosť (1) overená pre $k = x_n \cdot r = x_n \cdot \varphi(x_n)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte si a dokážte nasledujúce tvrdenia z teórie čísel:
- a) ak $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$ a $a \mid bc$, tak $a \mid c$;
- b) $\mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(a - kb, b)$;
- c) ak $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, tak $\mathrm{nsd}(a^m, b^n) = 1$.

N2. Daná je k-prvková množina M, ktorej prvky sú celé čísla. Dokážte, že existuje neprázdna podmnožina množiny M, ktorej súčet prvkov je násobkom čísla k. [Nech $M = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Ak sa medzi k číslami a_1, $a_1 + a_2$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ nachádza násobok k, tvrdenie je zrejmé. V opačnom prípade sa medzi nimi nachádzajú dve čísla $a_1 + \ldots + a_i$, $a_1 + \ldots + a_j$ s rovnakým zvyškom po delení k a ich rozdiel je násobkom k, zároveň však aj súčtom prvkov množiny $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$.]

[3] Funkcia $\varphi(m)$ je tzv. Eulerova funkcia, t. j. počet prirodzených čísel menších ako m, ktoré sú s m nesúdeliteľné.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014