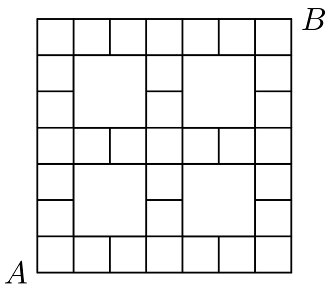
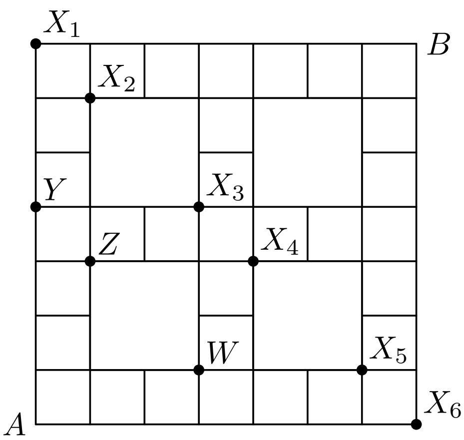
64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Určte počet ciest dĺžky* 14*, ktoré vedú po hranách siete na obr. 1 z bodu* A *do bodu* B*. Dĺžka každej hrany je rovná* 1*.* (*Pavel Novotný*)



Obr. 1

Riešenie. Pre jednoduchšie vyjadrovanie označme body tak ako na obr. 2. Každá cesta z bodu A do bodu B dĺžky 14 sa skladá zo siedmich úsekov smerom doprava a siedmich úsekov smerom nahor. Diagonálu X_1X_6 tak musí pretať práve raz, a to v jednom z bodov X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6. Pre každý z nich spočítame, koľko ciest cezeň vedie. V ďalšom texte budeme pod pojmom „cesta“ rozumieť iba trasy zložené z úsekov smerom doprava a nahor.



Obr. 2

Vzhľadom na to, že sieť je osovo súmerná podľa priamky X_1X_6, pre každé $i = 1, 2, \ldots, 6$ je obrazom každej cesty z A do X_i v tejto osovej súmernosti cesta z X_i do B a naopak. Počet ciest z A do X_i je preto rovný počtu ciest z X_i do B. Keďže každú cestu z A do X_i môžeme skombinovať s ľubovoľnou cestou z X_i do B, je celkový počet ciest z A do B vedúci cez X_i rovný druhej mocnine počtu ciest z A do X_i. Pre celkový výsledok teda stačí určiť počet ciest z A do X_i pre každé $i = 1, 2, \ldots, 6$ a tieto čísla umocniť na druhú a sčítať:

- Do bodu X_1 vedie z A jediná cesta zložená zo siedmich úsekov nahor.
- Do bodu X_2 vedie z A spolu 7 ciest – práve jeden zo siedmich úsekov musí viesť doprava a môžeme si vybrať, ktorý to bude.

- Do bodu X_3 sa dá dostať z A len prechodom cez niektorý (práve jeden) z bodov Y, Z, W:
  - ▷ Cez bod Y je jediná cesta.
  - ▷ Do bodu Z vedú z A štyri cesty (jeden zo štyroch úsekov je doprava), z bodu Z do X_3 vedú tri cesty (jeden z troch úsekov je nahor). Cez Z tak vieme ísť $4 \cdot 3 = 12$ spôsobmi.
  - ▷ Do bodu W vedú z A štyri cesty (jeden zo štyroch úsekov je nahor), z bodu W do X_3 vedie jediná cesta. Cez W preto vedú štyri cesty.

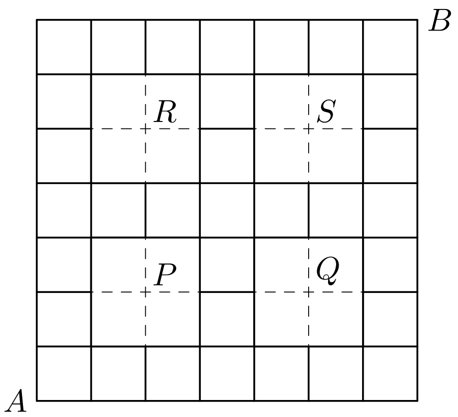
  Z A do X_3 teda vedie spolu $1 + 12 + 4 = 17$ ciest.

Keďže sieť je osovo súmerná aj podľa priamky AB, do bodov X_4, X_5, X_6 vedie z A postupne rovnaký počet ciest ako do bodov X_3, X_2, X_1. Vzhľadom na uvedené je celkový počet ciest z A do B rovný

$$1^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2 + 7^2 + 1^2 = (1 + 49 + 289) \cdot 2 = 678.$$

Iné riešenie. Uveďme najskôr známe pomocné tvrdenie: *Ak je sieť „kompletná" a má šírku m a výšku n, počet ciest dĺžky $m+n$ vedúcich z ľavého dolného do pravého horného rohu je rovný $\binom{m+n}{m}$.* Každá taká cesta je totiž jednoznačne určená výberom m-tice úsekov spomedzi všetkých $m+n$ úsekov, ktoré vedú smerom doprava.

Opäť budeme pod „cestou" rozumieť iba trasy zložené z úsekov smerom doprava a nahor. Keby bola mriežka kompletná, viedlo by z A do B spolu $\binom{14}{7} = 3\,432$ ciest. Musíme odrátať tie cesty, ktoré vedú cez niektorý z bodov P, Q, R, S (obr. 3). Označme M_X množinu všetkých ciest z A do B vedúcich cez zvolený bod siete X. Počet takých ciest je zrejme rovný súčinu počtu ciest z A do X a počtu ciest z X do B.



Obr. 3

Z uvedeného dostávame

$$|M_P| = \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{5} = 1\,512, \qquad |M_Q| = \binom{7}{5} \cdot \binom{7}{2} = 441,$$
$$|M_R| = \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{5} = 441, \qquad |M_S| = \binom{10}{5} \cdot \binom{4}{2} = 1\,512.$$

Niektoré cesty prechádzajú cez viacero spomedzi bodov P, Q, R, S. Aby sme vypočítali počet prvkov zjednotenia množín M_P, M_Q, M_R, M_S, potrebujeme ešte určiť počty prvkov prienikov dvojíc a trojíc z týchto množín (prienik všetkých štyroch množín je prázdny, keďže žiadna cesta nevedie súčasne cez R aj Q).

Z jednoduchého zovšeobecnenia úvahy o počte ciest vedúcich z A do B cez daný bod X vyplýva, že počet ciest, ktoré vedú z Y_0 postupne cez body Y_1, Y_2, atď. až do Y_{k+1}, je rovný súčinu počtov ciest z Y_i do Y_{i+1} pre $i = 0, 1, \dots, k$. Ak teda označíme $M_{Y_1 Y_2 \dots Y_k}$ množinu všetkých ciest vedúcich z A do B postupne cez body Y_1, Y_2, …, Y_k, pre mohutnosti množín máme

$$
\begin{aligned}
|M_{PQ}| &= \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{7}{2} = 126, & |M_{PR}| &= \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{7}{5} = 126,\\
|M_{QS}| &= \binom{7}{5} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 126, & |M_{RS}| &= \binom{7}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 126,\\
|M_{PS}| &= \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 720, & |M_{PQS}| = |M_{PRS}| &= \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 36.
\end{aligned}
$$

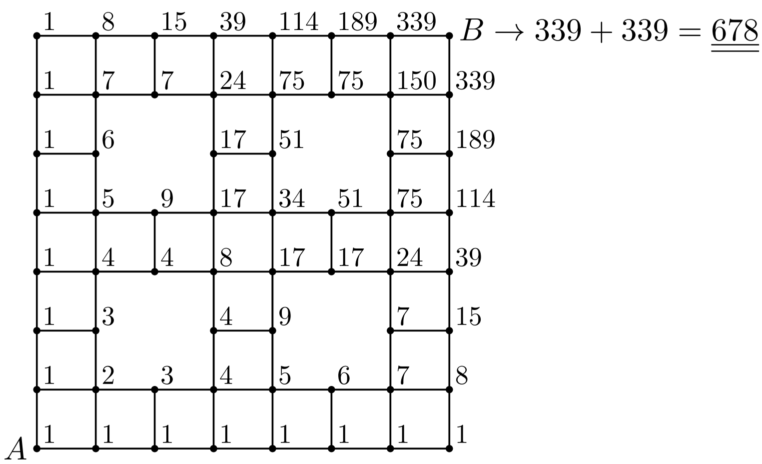
Ostatné prieniky sú prázdne.

Z princípu exklúzie a inklúzie potom dostávame

$$
\begin{aligned}
&|M_P \cup M_Q \cup M_R \cup M_S| = |M_P| + |M_Q| + |M_R| + |M_S| -\\
&- \big(|M_P \cap M_Q| + |M_P \cap M_R| + |M_P \cap M_S| + |M_Q \cap M_R| + |M_Q \cap M_S| + |M_R \cap M_S|\big) +\\
&+ \big(|M_P \cap M_Q \cap M_R| + |M_P \cap M_Q \cap M_S| + |M_P \cap M_R \cap M_S| + |M_Q \cap M_R \cap M_S|\big) -\\
&- |M_P \cap M_Q \cap M_R \cap M_S| =\\
&= 2 \cdot 1\,512 + 2 \cdot 441 - (4 \cdot 126 + 720 + 0) + (2 \cdot 36 + 2 \cdot 0) - 0 = 2\,754
\end{aligned}
$$

a ciest z A do B, ktoré nevedú cez žiadny z bodov P, Q, R, S, je $3\,432 - 2\,754 = 678$.

Iné riešenie. Postupne zľava doprava a zdola nahor pripíšeme ku každému bodu siete, koľko ciest z bodu A zložených z úsekov vedúcich nahor a doprava do neho vedie (obr. 4). Ak sa do daného bodu dá prísť len z jedného smeru, počet ciest bude rovnaký, ako počet ciest vedúcich do bodu, z ktorého prichádzame. Ak sa dá prísť z dvoch smerov, počet ciest bude súčtom počtov ciest vedúcich do bodov, z ktorých môžeme prísť. Takto vieme vyplniť celú sieť. Hľadaný počet ciest sa rovná číslu, ktoré na konci pripíšeme k bodu B. (Pri vypĺňaní môžeme využiť osovú súmernosť podľa priamky AB a ušetriť si tak časť práce.)



Obr. 4

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak žiak má správny postup a len sa pomýli pri numerických výpočtoch, za každú chybu strhnite 1 bod, najviac však strhnite 2 body.

Ak žiak postupuje ako pri druhom riešení, no nesprávne použije princíp inklúzie a exklúzie (napr. nepripočíta mohutnosti prienikov trojíc množín), dajte nanajvýš 3 body.

Ak žiak postupuje ako pri treťom riešení, no tabuľku nedokončí, udeľte 3 body ak je z riešenia zrejmé, že žiak chápe princíp vypĺňania pri „dierach"; v opačnom prípade dajte nanajvýš 2 body.

Za prácu, v ktorej sú uvedené len čiastkové výsledky napr. z niektorého tu uvedeného riešenia (bez náznaku ďalšieho postupu) dajte nanajvýš 2 body.

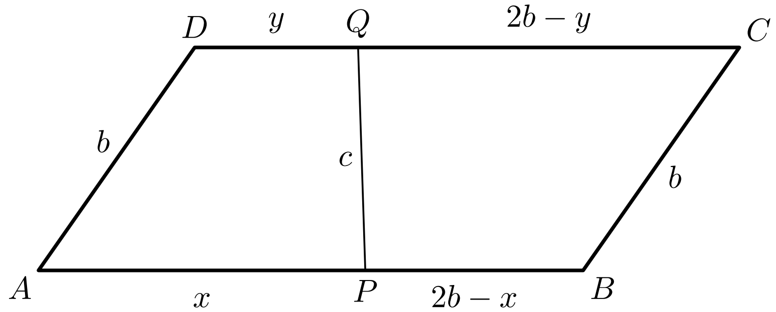
---

2. *Daný je rovnobežník $ABCD$, pričom $|AB| = 2|BC|$. Určte všetky priamky, ktoré delia daný rovnobežník na dva dotyčnicové štvoruholníky.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pri riešení využijeme známe kritérium: *Štvoruholník je dotyčnicový práve vtedy, keď súčet dĺžok jednej dvojice jeho protiľahlých strán sa rovná súčtu dĺžok druhej dvojice.*[1]

Aby priamka delila rovnobežník na dva štvoruholníky, musí prechádzať vnútornými bodmi dvoch jeho protiľahlých strán. Rozoberieme oba prípady, podľa toho, ktorú dvojicu strán deliaca priamka pretína.

Uvažujme najskôr deliacu priamku PQ, pričom body P, Q sú postupne vnútornými bodmi strán AB, CD. Označme b dĺžku strany BC a c, x a y postupne dĺžky úsečiek PQ, AP a DQ. (obr. 5).



Obr. 5

Predpokladajme, že priamka PQ vyhovuje podmienkam úlohy. Potom pre dotyčnicové štvoruholníky $APQD$ a $BPQC$ platí

$$\begin{aligned} b + c &= x + y, \\ b + c &= (2b - x) + (2b - y) = 4b - (x + y). \end{aligned}$$

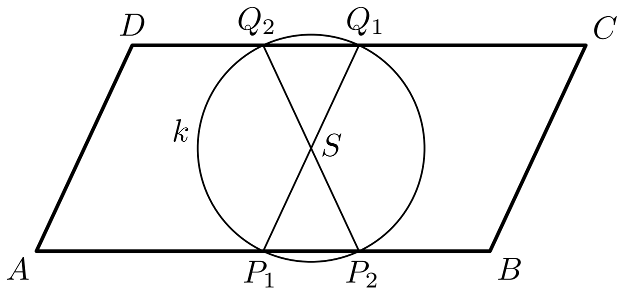
Sčítaním oboch rovností dostaneme $2(b + c) = 4b$, odkiaľ po úprave $c = b$. Dosadením do prvej rovnice obdržíme $x + y = 2b$, t. j. $x = 2b - y$. To znamená, že $|AP| = |CQ|$. V stredovej súmernosti podľa stredu rovnobežníka, ktorý označme S, sa preto bod P zobrazí na bod Q, čiže priamka PQ prechádza bodom S a S je stredom úsečky PQ.

Z uvedeného vyplýva, že body P, Q ležia na kružnici $k(S; \frac{1}{2}b)$. Jej navzájom súmerné priesečníky so stranami AB a CD daného rovnobežníka určujú polohu bodu P a Q, teda hľadanú priamku PQ. Pritom pre každú takto nájdenú priamku PQ prechádzajúcu cez S platí $|PQ| = b$ a $|AP| + |QD| = |PB| + |CQ| = 2b$, teda vzniknuté

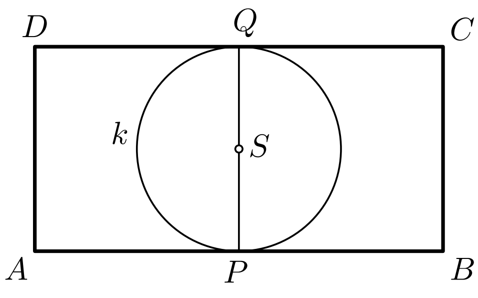
[1] Tvrdenie možno jednoducho odvodiť s využitím faktu, že vzdialenosti vrcholu od bodov dotyku vpísanej kružnice so stranami priľahlými k danému vrcholu sú zhodné.

štvoruholníky naozaj sú dotyčnicové. Všetky riešenia úlohy sú preto určené práve priesečníkmi kružnice k so stranami rovnobežníka.

Podľa trojuholníkovej nerovnosti pre trojuholník ABD je $b + |BD| > 2b$. Odtiaľ $|BD| > b$, čiže $|SB| > \frac{1}{2}b$ a B je vonkajším bodom kružnice k. Analogický výsledok platí aj pre ostatné vrcholy rovnobežníka $ABCD$. Všetky spoločné body kružnice k s priamkami AB a CD teda vždy ležia vnútri strán rovnobežníka.



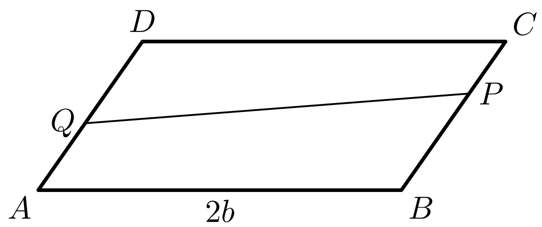
Obr. 6a



Obr. 6b

V prípade, že $ABCD$ je kosodĺžnik (obr. 6a), je jeho výška na stranu AB menšia ako b a vzdialenosť stredu S od priamok AB a CD menšia ako $\frac{1}{2}b$, takže kružnica k má dva priesečníky s oboma dlhšími stranami a úloha má v tomto prípade *dve riešenia* – jedno zodpovedá rozdeleniu kosodĺžnika na dva zhodné kosoštvorce a druhé na dva zhodné rovnoramenné lichobežníky[2].

Ak je $ABCD$ obdĺžnik (obr. 6b), sú obe jeho dlhšie strany dotyčnicami kružnice k, ktorá tak má s každou z nich spoločný práve jeden bod, a existuje potom práve *jedno riešenie* danej úlohy zodpovedajúce rozdeleniu obdĺžnika na dva zhodné štvorce.



Obr. 7

Teraz uvažujme prípad, keď body P a Q sú vnútornými bodmi oboch kratších protiľahlých strán daného rovnobežníka, napr. P je vnútorným bodom strany BC a Q je vnútorným bodom strany DA (obr. 7). Potom však v štvoruholníku $ABPQ$ už sama strana AB má väčšiu dĺžku ako súčet dĺžok strán BP a QA, pretože $|AB| = 2b$ a $|BP| + |QA| < |BC| + |DA| = 2b$. Kritérium z úvodu riešenia teda nemôže byť splnené a ďalšie riešenie v tomto prípade nedostávame.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vylúčenie prípadu, že priamka pretína kratšie strany, 1 bod za uvedenie rovností vyjadrujúcich podmienky, že štvoruholníky sú dotyčnicové, 1 bod za odvodenie $c = b$, 1 bod za odvodenie $|AP| = |CQ|$ a 2 body za dokončenie riešenia. Jeden bod strhnite, ak si žiak neuvedomí, že v prípade obdĺžnika je len jedno riešenie. Za uhádnutie riešení (t. j. ak sú len uvedené obe rozdelenia na kosoštvorce a rovnoramenné lichobežníky, ale chýba postup dokazujúci, že iné riešenia neexistujú) dajte 2 body – po jednom za každé riešenie.

[2] Im sa dá kružnica aj opísať, sú teda dokonca *dvojstredové.*

3. *Určte všetky dvojice (p, q) celých čísel takých, že p je celočíselným násobkom čísla q a kvadratická rovnica $x^2 + px + q = 0$ má aspoň jeden celočíselný koreň.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. V celom riešení budeme pre zjednodušenie vyjadrovania pod pojmom *násobok* rozumieť vždy celočíselný násobok. Predpokladajme, že dvojica (p, q) celých čísel vyhovuje podmienkam úlohy. Ak má uvažovaná kvadratická rovnica jeden z koreňov celočíselný, je aj druhý koreň celočíselný, lebo podľa Viètových vzťahov korene x_1, x_2 a koeficient p uvažovanej kvadratickej rovnice spĺňajú podmienku $x_1 + x_2 = -p$. Pre oba celočíselné korene x_1, x_2 navyše platí $x_1 x_2 = q$.

Podľa zadania je preto súčet $x_1 + x_2$ násobkom súčinu $x_1 x_2$, a teda aj násobkom každého z koreňov x_1, x_2. Rozdiel dvoch násobkov daného čísla je opäť násobkom tohto čísla, preto aj $(x_1 + x_2) - x_1 = x_2$ je násobkom čísla x_1. Analogicky x_1 je násobkom čísla x_2. Aby boli korene navzájom svojimi násobkami, nutne musí platiť buď $x_2 = -x_1$, alebo $x_2 = x_1$. Oba prípady ďalej vyšetríme osobitne.

- Ak $x_2 = -x_1$, tak $p = -(x_1 + x_2) = 0$ a $q = -x_1^2 \leqq 0$. Keďže 0 je násobkom každého celého čísla, hodnota x_1 môže byť ľubovoľným celým číslom a danej úlohe vyhovuje každá dvojica $(p, q) = (0, -n^2)$, pričom n je ľubovoľné celé číslo (pre vygenerovanie všetkých *rôznych* riešení samozrejme stačí uvažovať len nezáporné hodnoty n).
- Ak $x_2 = x_1 = x$, tak $p = -2x$ a $q = x^2$. Aby bolo $2x$ násobkom x^2, musí byť buď $x = 0$, alebo 2 násobkom čísla x. Prvý prípad prislúcha riešeniu $(p, q) = (0, 0)$, ktoré už sme obdržali aj v predošlom prípade pre $n = 0$. V druhom prípade x leží v množine $\{-2, -1, 1, 2\}$, čomu postupne zodpovedajú dvojice $(p, q) \in \in \{(-4, 4), (-2, 1), (2, 1), (4, 4)\}$. Všetky štyri zrejme spĺňajú podmienky zadania.

Odpoveď. Danej úlohe vyhovujú dvojice $(-4, 4)$, $(-2, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 4)$, ako aj všetky dvojice $(0, -n^2)$, kde n je ľubovoľné nezáporné celé číslo.

Iné riešenie. Predpokladajme, že dvojica (p, q) vyhovuje zadaniu a označme x_1 celočíselný koreň zadanej rovnice a k také celé číslo, že $p = k \cdot q$. Potom platí

$$x_1^2 + kx_1 q + q = 0, \qquad \text{čiže} \qquad x_1^2 = -q(kx_1 + 1).$$

V prípade, že $x_1 = 0$, dostávame $q = 0$ a teda aj $p = 0$.

Ak $x_1 \neq 0$, je x_1^2 nenulovým násobkom čísla $kx_1 + 1$. Keďže čísla $kx_1 + 1$ a x_1, a teda aj čísla $kx_1 + 1$ a x_1^2, sú nesúdeliteľné[3], je to možné len v prípade, že $kx_1 + 1 \in \{1, -1\}$.

- Ak $kx_1 + 1 = 1$, tak $kx_1 = 0$ a z nenulovosti x_1 vyplýva $k = 0$. Ďalej $q = -x_1^2$, $p = 0$ a podobne ako v prvom riešení dostávame vyhovujúce dvojice $(p, q) = (0, -n^2)$, pričom n je ľubovoľné celé číslo (hodnota $n = 0$ zahŕňa aj prípad $x_1 = 0$, ktorý sme už preverili osobitne).
- Ak $kx_1 + 1 = -1$, tak $kx_1 = -2$, teda dvojica (k, x_1) je niektorou z dvojíc $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-1, 2)$, odkiaľ už ľahko dopočítame hodnoty p, q a dostaneme zvyšné riešenia ako pri prvom postupe.

Poznámka. Rozbor rovnice

$$x_1^2 + kx_1 q + q = 0 \tag{1}$$

[3] Čísla $kx_1 + 1$ a x_1 môžu byť aj záporné, nesúdeliteľnosť je vtedy taktiež dobre definovaná.

z predchádzajúceho riešenia možno spraviť aj bez úvahy o nesúdeliteľnosti. Naozaj, z (1) vyplýva $q \mid x_1^2$ a $x_1 \mid q$, odkiaľ $x_1^2 \mid x_1 q$, a preto z (1) dokonca vyplýva $x_1^2 \mid q$, čo spolu s $q \mid x_1^2$ vedie k záveru, že $q = \pm x_1^2$. Po dosadení $q = x_1^2$ prejde (1) na tvar $x_1^2(2+kx_1) = 0$, po dosadení $q = -x_1^2$ na tvar $kx_1^3 = 0$. Záver riešenia je potom rovnaký ako pri pôvodnom postupe.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri prvom postupe dajte 2 body za uvedenie Viètových vzťahov spolu s argumentom o celočíselnosti x_2, 2 body za odvodenie $x_2 = \pm x_1$ a po jednom bode za dokončenie každej vetvy. Pri druhom postupe dajte 2 body za odvodenie rovnosti $x_1^2 = -q(kx_1 + 1)$, 2 body za vysvetlenie, prečo $kx_1 + 1 \in \{1, -1\}$ a po jednom bode za dokončenie každého prípadu. Ak žiak (pri akomkoľvek postupe) neuvažuje niektorú z dvojice vetiev a vo výsledku mu tak niektoré riešenia chýbajú, udeľte celkom nanajvýš 4 body. Ak žiak úlohu nevyrieši, ale uhádne *všetky* riešenia, dajte 2 body; pri uhádnutí jednej (kompletnej) vetvy riešení dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 15. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014