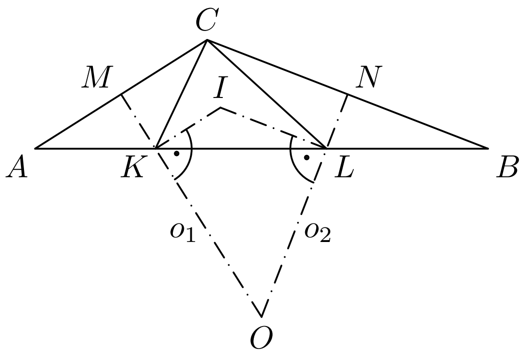
64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C. Os o_1 úsečky AC pretína stranu AB v bode K, os o_2 úsečky BC pretína stranu AB v bode L. Priesečník osí o_1 a o_2 označme O. Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka KLC leží na kružnici opísanej trojuholníku OKL.* (Radek Horenský)

Riešenie. Stredy strán AC, BC označme postupne M, N. Stred kružnice vpísanej trojuholníku KLC označme I. Na úvod poznamenajme, že body K, L ležia na strane AB vždy v takom poradí, ako na obr. 1, pretože podľa zadania má trojuholník ABC tupý uhol pri vrchole C a preto stred O jeho opísanej kružnice leží v polrovine opačnej k polrovine ABC.

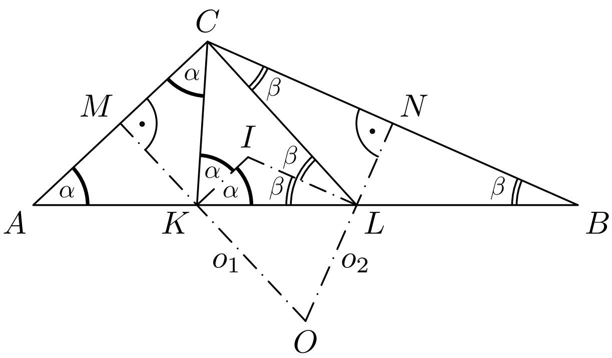


Obr. 1

Bod K leží na osi strany AC, preto KM je osou uhla AKC. Priamka KI je osou uhla LKC. Priamky KI a KM sú osami navzájom susedných uhlov a preto sú na seba kolmé. Analogicky $LI \perp LN$. Body K, L teda ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom OI, z čoho už triviálne vyplýva dokazované tvrdenie.

Iné riešenie. Označme uhly trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom α, β, γ a body M, N, I rovnako ako v prvom riešení. Štvoruholník $MONC$ je tetivový, pretože má pravé uhly pri vrcholoch M a N. Odtiaľ $|\measuredangle KOL| = 180° - |\measuredangle MCN| = 180° - \gamma$.

Keďže bod K leží na osi strany AC, je trojuholník AKC rovnoramenný so základňou AC (obr. 2). Pri nej majú jeho vnútorné uhly veľkosť α. Preto $|\measuredangle LKC| = 180° - |\measuredangle AKC| = 2\alpha$, a teda $|\measuredangle LKI| = \frac{1}{2}|\measuredangle LKC| = \alpha$. Podobne $|\measuredangle KLI| = \beta$. Z trojuholníka KLI tak máme $|\measuredangle KIL| = 180° - \alpha - \beta = \gamma$.



Obr. 2

Z uvedeného dostávame $|\measuredangle KOL| + |\measuredangle KIL| = 180°$, takže štvoruholník $KOLI$ je tetivový, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri prvom postupe za pozorovanie, že KM je osou uhla AKC, dajte 2 body, ďalšie 2 body dajte za odvodenie $KI \perp MO$ a 2 body za dokončenie riešenia. Pri druhom postupe dajte 1 bod za všimnutie si rovnoramennosti trojuholníka AKC, 2 body za vyjadrenie veľkosti uhla LKI, 1 bod za vyjadrenie veľkosti uhla KIL, 1 bod za vyjadrenie veľkosti uhla KOL a 1 bod za dokončenie riešenia.

---

2. *Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q) také, že hodnota výrazu $p^2+5pq+4q^2$ je druhou mocninou celého čísla.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Predpokladajme, že prvočísla p, q a nezáporné celé číslo k spĺňajú rovnosť $p^2 + 5pq + 4q^2 = k^2$. Tú ekvivalentne upravíme:

$$\begin{aligned} k^2 - (p^2 + 4pq + 4q^2) &= pq, \\ k^2 - (p + 2q)^2 &= pq, \\ (k - p - 2q)(k + p + 2q) &= pq. \end{aligned} \tag{1}$$

Pravá strana aj druhý činiteľ súčinu na ľavej strane sú kladné, takže aj prvý činiteľ musí byť kladný. Keďže p, q sú prvočísla, číslo pq sa dá rozložiť na súčin dvoch kladných čísel len štyrmi spôsobmi: $pq = 1 \cdot pq = p \cdot q = q \cdot p = pq \cdot 1$. Vzhľadom na to, že číslo $k + p + 2q$ je väčšie ako ktorýkoľvek prvok z množiny $\{1, p, q\}$, do úvahy prichádza len prvý z rozkladov, takže

$$k - p - 2q = 1 \qquad \text{a} \qquad k + p + 2q = pq. \tag{2}$$

Elimináciou premennej k (napr. odčítaním prvej rovnice od druhej) dostaneme

$$2p + 4q = pq - 1, \qquad \text{čiže} \qquad (p - 4)(q - 2) = 9. \tag{3}$$

Činiteľ $q - 2$ je nezáporný, pretože q je prvočíslo. Nezáporný teda musí byť aj činiteľ $p - 4$. Sú len tri možnosti, ako číslo 9 rozložiť na súčin dvoch nezáporných čísel:

$$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = 9 \cdot 1.$$

Z nich dostávame tri riešenia $(p, q) \in \{(5, 11), (7, 5), (13, 3)\}$, vo všetkých nájdené hodnoty p, q sú skutočne prvočísla. Skúšku pri tomto postupe robiť nie je nutné, pretože ak p, q spĺňajú rovnicu (3), vieme k nim z (2) dopočítať celé číslo k tak, aby platila rovnosť (1), ktorá je ekvivalentná s pôvodnou rovnosťou.

Iné riešenie. Po dosadení $q = p$ do zadaného výrazu vyjde $10p^2$, čo nie je druhá mocnina celého čísla pre žiadne celé číslo p. Musí preto byť $p \neq q$.

Zadaný výraz možno rozložiť na súčin:

$$p^2 + 5pq + 4q^2 = (p + q)(p + 4q). \tag{4}$$

Prvočísla p a q sú rôzne, preto je každé z nich nesúdeliteľné aj s $p + q$. Označme d najväčšieho spoločného deliteľa $p + q$ a $p + 4q$. Potom $d \mid (p + 4q) - (p + q) = 3q$, a keďže d je nesúdeliteľné s q, nutne $d \in \{1, 3\}$. Oba prípady rozoberieme.

Ak $d = 1$, musia byť oba činitele v (4) štvorcami, čiže existujú prirodzené čísla r, s také, že platí
$$\begin{aligned} p + q &= r^2, \\ p + 4q &= s^2. \end{aligned} \tag{5}$$
Navyše zrejme $2 < r < s$, pretože $p + q \geqq 2 + 3$.

Z toho
$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = (s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = (2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$
Z prvej rovnosti vyplýva $s - r \mid 3q$, t. j. $s - r \in \{1, 3, q, 3q\}$. Avšak prípady $s - r = q$ a $s - r = 3q$ môžeme vylúčiť, pretože im zodpovedajú rovnosti $s + r = 3$ a $s + r = 1$, ktoré sú v rozpore s podmienkou $2 < r < s$. Zvyšné dva prípady preveríme:

- Z $s - r = 1$ vyplýva $2r + s = 3r + 1 > 3$ a $2r - s = r - 1 > 1$. Z druhej rovnice tak $r - 1 = 3$, $s = 5$, $p = 13$, $q = 3$.
- Z $s - r = 3$ vyplýva $2r + s = 3r + 3 = 3(r + 1) > 3$. Z druhej rovnice potom vyplýva $2r - s = r - 3 = 1$. Odtiaľ $r = 4$, $s = 7$, $p = 5$, $q = 11$.

Ak $d = 3$, musia byť oba činitele v (4) trojnásobkom štvorcov, existujú teda prirodzené čísla $1 < r < s$ také, že platí
$$\begin{aligned} p + q &= 3r^2, \\ p + 4q &= 3s^2. \end{aligned} \tag{6}$$
Z toho
$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = 3(s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = 3(2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$
Preto $s - r = 1$ a $2r - s = 1$, teda $r = 2$, $s = 3$ a $p = 7$, $q = 5$.

Vo všetkých prípadoch nájdené hodnoty p, q a príslušné hodnoty r, s spĺňajú rovnosti (5), resp. (6), teda výraz (4) je naozaj štvorec. Úloha má 3 riešenia (p, q), a to $(13, 3)$, $(5, 11)$, $(7, 5)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri prvom postupe dajte 2 body za rozklad (1), ďalšie 2 body za odvodenie rozkladu (3) a 2 body za dokončenie riešenia. Pri druhom postupe dajte 1 bod za rozklad (4), 1 bod za odvodenie $d \in \{1, 3\}$, 2 body za vyšetrenie prípadu $d = 1$ a 2 body za vyšetrenie prípadu $d = 3$. Ak riešiteľ úlohu nevyrieši, ale skúšaním nájde aspoň dve z troch riešení, udeľte mu 1 bod; ak nájde skúšaním všetky tri riešenia, udeľte 2 body.

---

3. *Pre kladné reálne čísla a, b, c platí*
$$ab + bc + ca = 16, \quad a \geqq 3.$$
Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $2a + b + c$. (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Upravujme druhú mocninu výrazu $V = 2a + b + c$, ktorý je zrejme kladný. Pri tom výhodne využijeme zadanú väzbu $ab + bc + ca = 16$:
$$\begin{aligned} V^2 &= (2a + b + c)^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc = \\ &= 4a^2 + b^2 - 2bc + c^2 + 4(ab + bc + ca) = 4a^2 + (b - c)^2 + 4 \cdot 16. \end{aligned}$$

Podľa zadania je $a^2 \geqq 9$ a zrejme $(b-c)^2 \geqq 0$, takže $V^2 \geqq 4\cdot 9 + 4\cdot 16 = 100$. Preto $V \geqq 10$.

Skúsme nájsť také a, b, c vyhovujúce zadaniu, pre ktoré nastáva $V = 10$. Aby v odvodených nerovnostiach nastala rovnosť, musí byť $b = c$ a $a = 3$. Hľadáme preto $b > 0$ také, že $6b + b^2 = 16$. Táto kvadratická rovnica má korene 2 a -8. Vyhovujúcou trojicou (a, b, c) je teda $(3, 2, 2)$ a najmenšia možná hodnota zadaného výrazu je 10.

Iné riešenie. Zo zadanej rovnosti $ab + bc + ca = 16$ vyjadríme $c = (16 - ab)/(a + b)$ a dosadíme do výrazu V, ktorého najmenšiu hodnotu hľadáme:

$$V = 2a+b+c = 2a+b+\frac{16-ab}{a+b} = (a+b)+\frac{16+a^2}{a+b} \geqq 2\sqrt{16+a^2} \geqq 2\sqrt{16+3^2} = 10.$$

Pri prvej nerovnosti sme využili známu AG-nerovnosť pre dvojicu kladných čísel $a + b$ a $(16 + a^2)/(a + b)$.

Trojicu, pri ktorej $V = 10$, nájdeme podobne ako v prvom riešení.

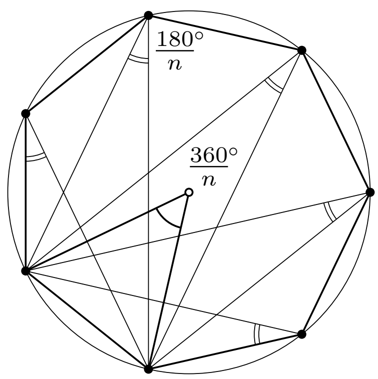
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za dôkaz, že $V \geqq 10$ a 2 body za nájdenie zadaniu vyhovujúcej trojice a, b, c, pre ktorú $V = 10$.

---

4. *Majme n bodov v rovine, $n \geqq 3$, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Uvažujme vnútorné uhly všetkých trojuholníkov s vrcholmi v daných bodoch a veľkosť najmenšieho z nich označme φ. Pre dané n nájdite najväčšie možné φ.*

(*Stanislava Sojáková*)

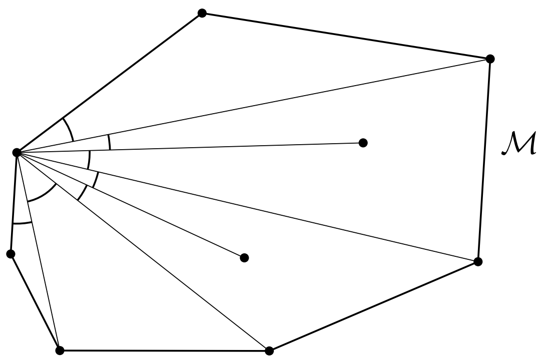
Riešenie. Ukážeme, že najväčšie možné φ dosiahneme, keď body sú umiestnené vo vrcholoch pravidelného n-uholníka (obr. 3). V takom prípade každý uvažovaný trojuholník má opísanú kružnicu totožnú s kružnicou opísanou danému n-uholníku a teda všetky uvažované vnútorné uhly sú obvodovými uhlami prislúchajúcimi k nejakej tetive tejto kružnice. Najmenší uhol bude ten ostrý uhol, ktorý prislúcha k najkratšej tetive, t. j. k niektorej z n zhodných strán n-uholníka (všetky ostatné tetivy sú uhlopriečkami, teda sú dlhšie). Keďže stredový uhol prislúchajúci k strane má veľkosť $360°/n$, najmenší uhol má v tomto prípade veľkosť $\varphi = 180°/n$.



Obr. 3

Ostáva ukázať, že pre ľubovoľné rozmiestnenie n bodov platí $\varphi \leqq 180°/n$. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že n bodov je rozmiestnených tak, že všetky uvažované uhly sú väčšie ako $180°/n$. Zostrojme konvexný obal danej množiny bodov,

t. j. najmenší mnohouholník $\mathcal{M}$, ktorý obsahuje všetky dané body. Označme m počet bodov, ktoré sa nachádzajú na obvode mnohouholníka $\mathcal{M}$. Zrejme $m \leqq n$ (vrcholy konvexného obalu tvoria podmnožinu danej množiny n bodov).



Obr. 4

Súčet vnútorných uhlov mnohouholníka $\mathcal{M}$ je rovný $(m-2)\cdot 180°$.[1] Zostrojme úsečku medzi každými dvoma spomedzi všetkých n bodov. Z každého vrcholu mnohouholníka $\mathcal{M}$ vychádza $n-1$ úsečiek. Dve z nich sú stranami a zvyšné „delia“ vnútorný uhol pri tomto vrchole na $n-2$ menších uhlov (obr. 4). Podľa predpokladu má každý z týchto uhlov veľkosť viac ako $180°/n$, teda každý vnútorný uhol mnohouholníka $\mathcal{M}$ je väčší ako $(n-2)\cdot 180°/n$. Vrcholov je m, teda celkový súčet vnútorných uhlov v $\mathcal{M}$ je viac ako $m(n-2)\cdot 180°/n$. Platí preto nasledovná nerovnosť, ktorú ďalej upravíme:

$$\begin{aligned}(m-2)\cdot 180° &> m(n-2)\cdot\frac{180°}{n},\\ n(m-2) &> m(n-2),\\ mn-2n &> mn-2m,\\ m &> n.\end{aligned}$$

Tým sme dostali spor.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz, že ak sú body vrcholmi pravidelného n-uholníka, tak $\varphi = 180°/n$ a 4 body za dôkaz, že vždy platí $\varphi \leqq 180°/n$. Ak žiak odvodí vzťah $\varphi \leqq 180°/n$ len pre prípad, keď $m = n$ (teda pre také konfigurácie, keď všetky body ležia na obvode konvexného obalu), zo 4 bodov udeľte iba 2.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

---

[1] Toto známe tvrdenie možno ľahko dokázať tak, že m-uholník rozdelíme na $m-2$ trojuholníkov majúcich vrcholy v jeho vrcholoch.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015