64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

---

1. *Chlapci si medzi sebou menili známky, guľôčky a loptičky. Za 8 guľôčok je 10 známok, za 4 loptičky je 15 známok. Koľko guľôčok je za jednu loptičku?* (Marie Krejčová)

Nápad. Predstavte si, že máte napr. 100 známok. Za čo by ste mohli niektoré z nich vymeniť?

Riešenie. V oboch porovnaniach „hodnôt" jednotlivých predmetov sa vyskytujú známky, budeme ich teda považovať za akési spoločné „platidlo":

Ak za 8 guľôčok je 10 známok, tak za trojnásobné množstvo guľôčok musí byť trojnásobné množstvo známok, teda za 24 guľôčok je 30 známok. Ak za 4 loptičky je 15 známok, tak za dvojnásobné množstvo loptičiek musí byť dvojnásobné množstvo známok, teda za 8 loptičiek je 30 známok.

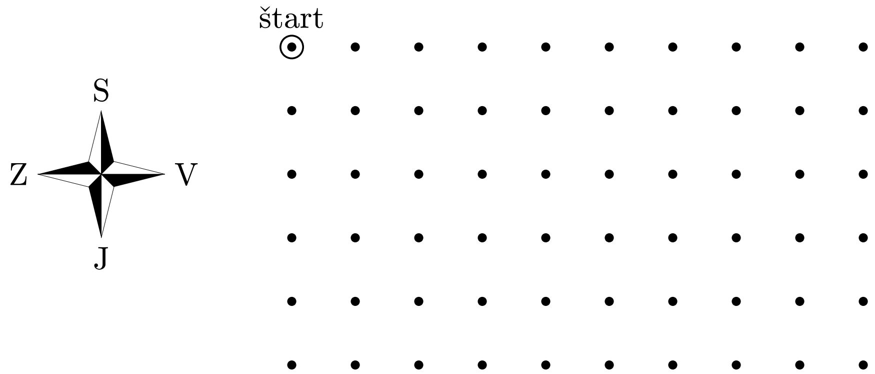
Ak máme 30 známok, môžeme ich vymeniť buď za 24 guľôčok, alebo za 8 loptičiek. Osem loptičiek má teda rovnakú hodnotu ako 24 guľôčok, za jednu loptičku je osemkrát menej guľôčok, teda 3 guľôčky.

Poznámka. K rovnakému výsledku sa možno dostať rôznymi spôsobmi, napr. takto:

Za 8 guľôčok je 10 známok, teda za 4 guľôčky je 5 známok a za 12 guľôčok je 15 známok. Za rovnaký počet známok možno vymeniť aj 4 loptičky, takže 4 loptičky majú rovnakú hodnotu ako 12 guľôčok. Za jednu loptičku sú 3 guľôčky.

---

2. *Žabí princ sa zúčastnil skokanskej súťaže, pri ktorej sa skákalo po kameňoch rozmiestnených ako na obrázku. Bolo dovolené skákať len na najbližšie kamene východným alebo južným smerom. Každý skok na východ bol ocenený dvoma bodmi, každý skok na juh bol ocenený piatimi bodmi. Žabí princ získal 14 bodov. Určte všetky možné cesty, kadiaľ mohol skákať.* (Eva Patáková)



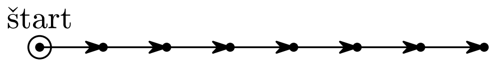
Nápad. Skúšajte skákať podľa uvedených pravidiel a vylučujte nevyhovujúce možnosti.

Riešenie. V závislosti od počtu skokov, ktoré mohol žabí princ spraviť na juh, určíme počet skokov na východ tak, aby súčet získaných bodov bol 14:

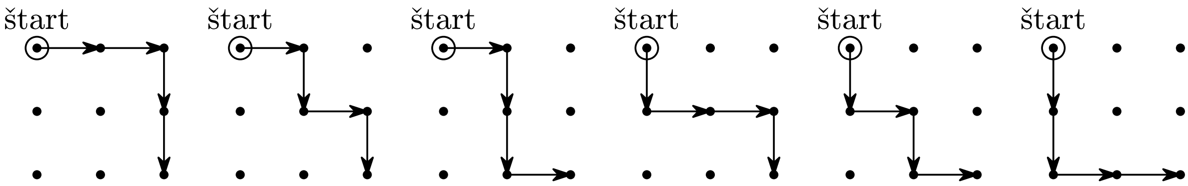
- na juh nemusel skočiť ani raz, 14 bodov možno získať siedmimi skokmi na východ;
- keby skočil na juh raz, potom by musel niekoľkými skokmi na východ získať $14 - 5 = 7$ bodov, čo nie je možné (skokmi len na východ by získal párny počet bodov);

- keby skočil na juh dvakrát, tak by na východ musel skočiť tiež dvakrát ($10 + 4 =$ $= 14$);
- keby skočil na juh viac ako dvakrát, tak by získal viac ako 14 bodov.

Žabí princ teda skákal buď sedemkrát na východ, alebo dvakrát na východ a dvakrát na juh. V prvom prípade sa dá skákať jediným spôsobom:



V druhom prípade mohol skákať ktoroukoľvek z nasledujúcich možností:



---

3. *Z čísla* 215 *môžeme vytvoriť štvorciferné číslo tým, že medzi jeho cifry vpíšeme akúkoľvek ďalšiu cifru. Takto sme vytvorili dve štvorciferné čísla, ktorých rozdiel bol* 120. *Aké dve štvorciferné čísla to mohli byť? Určte aspoň jedno riešenie.* (*Libor Šimůnek*)

Nápad. Je možné, aby vpisované cifry boli v oboch prípadoch na rovnakom mieste?

Riešenie. Novo vytvorené štvorciferné číslo je buď typu $2{*}15$, alebo typu $21{*}5$ (hviezdičkou označujeme vpisované neznáme cifry). Keby boli obe nové čísla rovnakého typu, bol by v prvom prípade ($2{*}15$) rozdiel takých čísel násobkom 100, v druhom prípade ($21{*}5$) by bol násobkom 10, avšak nie väčším ako 90. Rozdiel však má byť 120, takže nové čísla musia byť rôzneho typu.

V ľavom stĺpci uvažujeme prípad, keď väčšie z čísel je číslo typu $2{*}15$, v pravom stĺpci naopak:

$$\begin{array}{r} 2\ {*}\ 1\ 5 \\ -\ 2\ 1\ {*}\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\ 1\ {*}\ 5 \\ -\ 2\ {*}\ 1\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 0 \end{array}$$

Oba prípady doriešime odzadu ako algebrogram, čím dostaneme dve možné riešenia:

$$\begin{array}{r} 2\ \mathbf{3}\ 1\ 5 \\ -\ 2\ 1\ \mathbf{9}\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\ 1\ \mathbf{3}\ 5 \\ -\ 2\ \mathbf{0}\ 1\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 0 \end{array}$$

---

4. *Nájdite najväčšie číslo také, že*

- *žiadna cifra sa v ňom neopakuje,*
- *súčin každých dvoch cifier je nepárny,*
- *súčet všetkých cifier je párny.*

(*Martin Mach*)

Nápad. Z akých cifier môže pozostávať číslo, pre ktoré platí druhá podmienka zo zadania?

Riešenie. Súčin dvoch čísel je nepárny práve vtedy, keď sú obe čísla nepárne. Preto hľadané číslo môže pozostávať len z nepárnych cifier.

Súčet niekoľkých nepárnych čísel je párny práve vtedy, keď je počet sčítancov párny. Preto hľadané číslo pozostáva z párneho počtu cifier.

Nepárnych cifier je päť a cifry sa nemajú opakovať, preto každé číslo vyhovujúce uvedeným podmienkam je buď dvojciferné, alebo štvorciferné. Najväčším z nich je číslo zapísané pomocou štyroch najväčších cifier zoradených zostupne, teda číslo 9753.

---

5. *Na obrázku je štvorec rozdelený na 25 štvorčekov. Vyfarbite štvorčeky piatimi farbami tak, aby platilo:*

- *každý štvorček je vyfarbený jednou farbou,*
- *v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci nie sú dva štvorčeky rovnakej farby,*
- *na žiadnej z oboch uhlopriečok nie sú dva štvorčeky rovnakej farby,*
- *žiadne dva rovnako zafarbené štvorčeky sa nedotýkajú stranou ani vrcholom.*

(*Michaela Petrová*)

Nápad. Skúste ako prvý vyfarbiť prostredný štvorček.

Riešenie. Zo zadania vieme, že v každom riadku, v každom stĺpci a na každej uhlopriečke bude každá z piatich farieb práve raz. Spolu teda bude každá z piatich farieb v celom štvorci zastúpená práve päťkrát. Navyše musíme mať na pamäti ešte podmienku, že dva štvorčeky rovnakej farby nesmú mať spoločný ani vrchol.

Prostredný štvorček leží na oboch uhlopriečkach, takže po jeho vyfarbení budeme môcť uplatniť podmienky na čo možno najväčší počet ostatných štvorčekov. Začneme tým, že prostredný štvorček vyfarbíme napr. namodro (M) a všetky políčka, ktoré nemôžu byť vyfarbené rovnakou farbou, označíme krížikom:

×		×		×
	×	×	×	
×	×	**M**	×	×
	×	×	×	
×		×		×

V každom riadku a v každom stĺpci, kde ešte nie je modrý štvorček, si môžeme vybrať z dvoch možností. Budeme postupovať po riadkoch zhora nadol – v každom riadku vyfarbíme jedno políčko a označíme krížikom všetky ostatné políčka v štvorci, ktoré nemôžu byť modré. Takto postupne dostávame:

×	**M**	×	×	×
×	×	×	×	
×	×	M	×	×
	×	×	×	
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	**M**
×	×	M	×	×
	×	×	×	×
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	M
×	×	M	×	×
M	×	×	×	×
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	M
×	×	M	×	×
M	×	×	×	×
×	×	×	**M**	×

Budeme pokračovať vo vyfarbovaní napr. zelenou farbou (Z). Z rovnakého dôvodu ako vyššie chceme začať s takým políčkom, ktorého vyfarbenie ovplyvní čo možno najviac ostatných políčok. Preto volíme nejaké políčko blízko stredu štvorca, napr. druhé políčko v treťom riadku:

	M			
×	×	×		M
×	**Z**	M	×	×
M	×	×		
	×		M	

Ďalej postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade, akurát dávame prednosť tým riadkom, v ktorých sa javí jediná možnosť vyfarbenia:

	M	×	×	×
×	×	×	**Z**	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	
×	×		M	

Z	M	×	×	×
×	×	×	Z	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	
×	×		M	×

Z	M	×	×	×
×	×	×	Z	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	**Z**
×	×	**Z**	M	×

Podľa rovnakých zásad pokračujeme s ďalšou farbou, napr. červenou (Č). Začíname napr. na štvrtom políčku v treťom riadku:

Z	M		×	
		×	Z	M
×	Z	M	**Č**	×
M		×	×	Z
		Z	M	

Z	M		×	×
	×	×	Z	M
×	Z	M	Č	×
M	**Č**	×	×	Z
×	×	Z	M	

Z	M	**Č**	×	×
Č	×	×	Z	M
×	Z	M	Č	×
M	Č	×	×	Z
×	×	Z	M	**Č**

Ako ďalšie vyfarbíme napr. druhý štvorček v druhom riadku, a to napr. hnedou farbou (H):

Z	M	Č		
Č	**H**	×	Z	M
×	Z	M	Č	
M	Č		×	Z
	×	Z	M	Č

Z	M	Č		×
Č	H	×	Z	M
×	Z	M	Č	**H**
M	Č		×	Z
	×	Z	M	Č

Z	M	Č	**H**	×
Č	H	×	Z	M
×	Z	M	Č	H
M	Č	**H**	×	Z
H	×	Z	M	Č

Teraz vidíme, že aj posledné nevyfarbené políčka spĺňajú všetky podmienky zo zadania. Ak ich teda vyfarbíme nejakou ďalšou farbou, napr. ružovou (R), dostávame jedno z možných riešení:

Z	M	Č	H	R
Č	H	R	Z	M
R	Z	M	Č	H
M	Č	H	R	Z
H	R	Z	M	Č

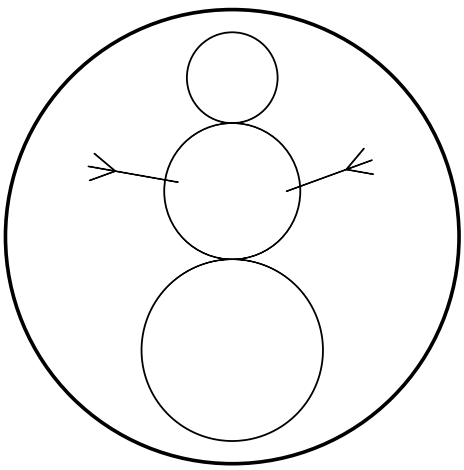
Poznámka. I keď to z predchádzajúceho opisu riešenia nie je úplne zrejmé, v skutočnosti má táto úloha iba dve riešenia (až na voľbu použitých farieb), a tie sú navyše zrkadlovo prevrátené. Pokúste sa preskúmať, prečo to tak je.

---

6. *Na medaile, ktorá má tvar kruhu s priemerom 20 cm, je narysovaný snehuliak tak, že sú splnené nasledujúce požiadavky:*

- *snehuliak je zložený z troch kruhov ako na obrázku,*
- *priemery všetkých kruhov vyjadrené v cm sú celočíselné,*
- *priemer každého väčšieho kruhu je o 2 cm väčší ako priemer kruhu predchádzajúceho.*

Určte výšku čo najväčšieho snehuliaka s uvedenými vlastnosťami.



(*Lenka Dedková*)

Nápad. O koľko cm je priemer najväčšieho kruhu väčší ako priemer najmenšieho?

Riešenie. Najmenší je horný kruh predstavujúci hlavu snehuliaka. Prostredný kruh je o 2 cm väčší ako najmenší kruh a spodný kruh je o 4 cm väčší ako najmenší kruh. Celková výška snehuliaka je teda rovná trojnásobku priemeru najmenšieho kruhu a k tomu 6 cm.

Aby bola nad aj pod snehuliakom ešte nejaká medzera, musí byť výška snehuliaka menšia ako 20 cm. To znamená, že trojnásobok priemeru najmenšieho kruhu musí byť menší ako 14 cm, takže priemer najmenšieho kruhu musí byť menší alebo rovný 4 cm (14 : 3 je 4, zvyšok 2). Najväčší snehuliak so všetkými požadovanými vlastnosťami je teda vysoký

$$3 \cdot 4 + 6 = 18\,(\mathrm{cm}).$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Róbert Hajduk, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Tomáš Kocák, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014