64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

1. *Milena nazbierala do košíka posledné spadnuté orechy a zavolala na partiu chlapcov, nech sa o ne podelia. Dala im ale podmienku: prvý si vezme 1 orech a desatinu zvyšku, druhý si vezme 2 orechy a desatinu nového zvyšku, tretí si vezme 3 orechy a desatinu ďalšieho zvyšku a tak ďalej. Takto sa podarilo rozobrať všetky orechy a pritom každý dostal rovnako veľa. Určte, koľko Milena nazbierala orechov a koľko sa o ne delilo chlapcov.* (*Marta Volfová*)

Nápad. Uvažujte od konca: koľko si vzal posledný chlapec a koľko predposledný?

Riešenie. Poradové číslo posledného chlapca označme n. Tento chlapec si vzal n orechov a desatinu vzniknutého zvyšku a potom už nič nezostalo. Nulový teda musel byť už zvyšok po odobratí n orechov.

Predposledný chlapec, s poradovým číslom $n-1$, si vzal $n-1$ orechov a desatinu vzniknutého zvyšku. Aby mal tiež n orechov ako posledný chlapec, musí byť táto desatina zvyšku rovná práve 1 orechu. Spomenutý zvyšok je teda 10 orechov.

Na posledného n-tého chlapca ostalo z týchto 10 orechov 9, neznáma n je teda 9. Chlapcov bolo 9 a každý si vzal rovnako ako posledný z nich, t. j. 9 orechov. Celkový počet orechov bol $9 \cdot 9 = 81$. Pre kontrolu uvádzame, ako si chlapci orechy postupne rozoberali:

- 1. chlapec: $1 + (81 - 1) : 10 = 1 + 8 = 9$, ostane 72,
- 2. chlapec: $2 + (72 - 2) : 10 = 2 + 7 = 9$, ostane 63,
- 3. chlapec: $3 + (63 - 3) : 10 = 3 + 6 = 9$, ostane 54,
- atď.,
- 8. chlapec: $8 + (18 - 8) : 10 = 8 + 1 = 9$, ostane 9,
- 9. chlapec: 9.

Milena nazbierala 81 orechov, o ktoré sa delilo 9 chlapcov.

Iný nápad. Uvažujte od začiatku: koľko mohlo, príp. nemohlo byť na začiatku orechov?

Iné riešenie. Prvý chlapec si vzal 1 orech a desatinu zvyšku, čo znamená, že celkový počet orechov bol

$$10x + 1,$$

pričom x je neznáme prirodzené číslo. Pri tomto označení si prvý chlapec vzal $1 + x$ orechov a nový zvyšok bol $10x + 1 - 1 - x = 9x$.

Druhý chlapec si vzal 2 orechy a desatinu nového zvyšku, čo znamená, že tento zvyšok bol

$$9x = 10y + 2, \tag{1}$$

pričom y je neznáme prirodzené číslo. Pri tomto označení si druhý chlapec vzal $2 + y$ orechov, nový zvyšok bol $10y + 2 - 2 - y = 9y$ atď.

Keďže si prvý a druhý chlapec odobrali rovnaký počet orechov, platí

$$1 + x = 2 + y, \quad \text{čiže} \quad y = x - 1.$$

Dosadením do rovnice (1) a jednoduchou úpravou získame x:

$$9x = 10x - 10 + 2,$$
$$x = 8.$$

Celkový počet orechov bol $80 + 1 = 81$ a každý chlapec si vzal $1 + 8 = 9$ orechov. Kontrolu u všetkých chlapcov urobíme rovnako ako v predchádzajúcej časti.

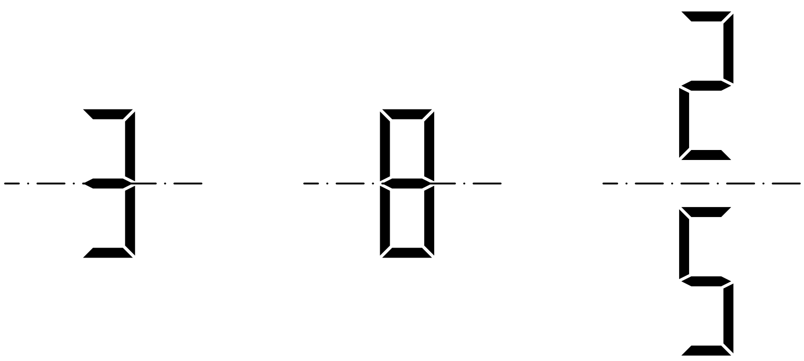
---

2. *Lenka sa bavila tým, že vyťukávala na kalkulačke čísla, pričom používala iba cifry od* 2 *do* 9 *(obr.). Zápisy niektorých čísel mali tú vlastnosť, že ich obraz v osovej alebo stredovej súmernosti bol opäť zápisom nejakého čísla. Určte počet všetkých nanajvýš trojciferných čísel s uvedenými vlastnosťami.* (*Lenka Dedková*)

Nápad. Rozdeľte vyhovujúce čísla do skupín podľa typu uvažovanej súmernosti.

Riešenie. Čísla vyhovujúce podmienkam zo zadania rozdelíme do troch skupín podľa toho, či uvažujeme súmernosť podľa vodorovnej osi, súmernosť podľa zvislej osi alebo súmernosť stredovú.

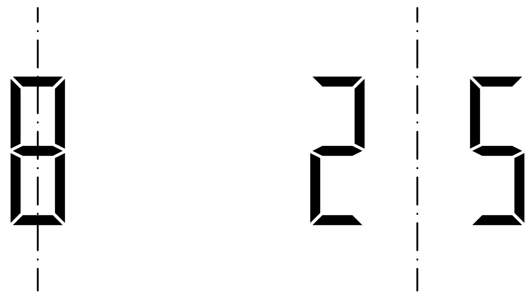
1) Jediné cifry, ktoré sú súmerné podľa vodorovnej osi alebo ktorých obraz vzhľadom na takú súmernosť je tiež cifrou, sú cifry 3, 8, 2 a 5:



Určíme, koľko je všetkých nanajvýš trojciferných čísel zostavených len z týchto cifier: Jednociferné čísla sú 4. Dvojciferných čísel je $4 \cdot 4 = 16$ (pred každú z cifier 2, 3, 5, 8 môžeme pripísať akúkoľvek z týchto štyroch cifier). Trojciferných čísel je $4 \cdot 16 = 64$ (pred každé dvojciferné číslo, ktorých sme napočítali 16, môžeme pripísať ľubovoľnú z uvažovaných štyroch cifier). Celkový počet čísel v tejto skupine je

$$4 + 16 + 64 = 84.$$

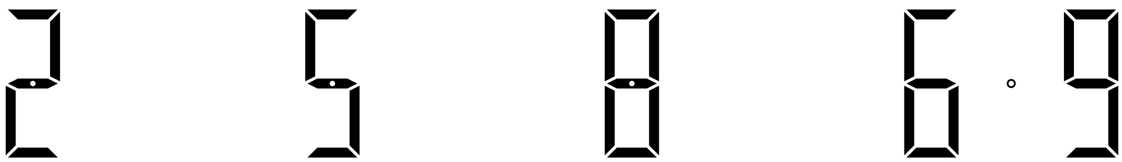
2) Jediné cifry, ktoré sú súmerné podľa zvislej osi alebo ktorých obraz vzhľadom na takú súmernosť je tiež cifrou, sú cifry 8, 2 a 5:



Počet všetkých nanajvýš trojciferných čísel zostavených len z týchto cifier určíme podobne ako v predchádzajúcej časti – najskôr počet jednociferných čísel, potom dvojciferných a nakoniec trojciferných:

$$3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 + 9 + 27 = 39.$$

3) Jediné cifry, ktoré sú stredovo súmerné alebo ktorých obraz vzhľadom na takú súmernosť je tiež cifrou, sú cifry 2, 5, 8, 6 a 9:



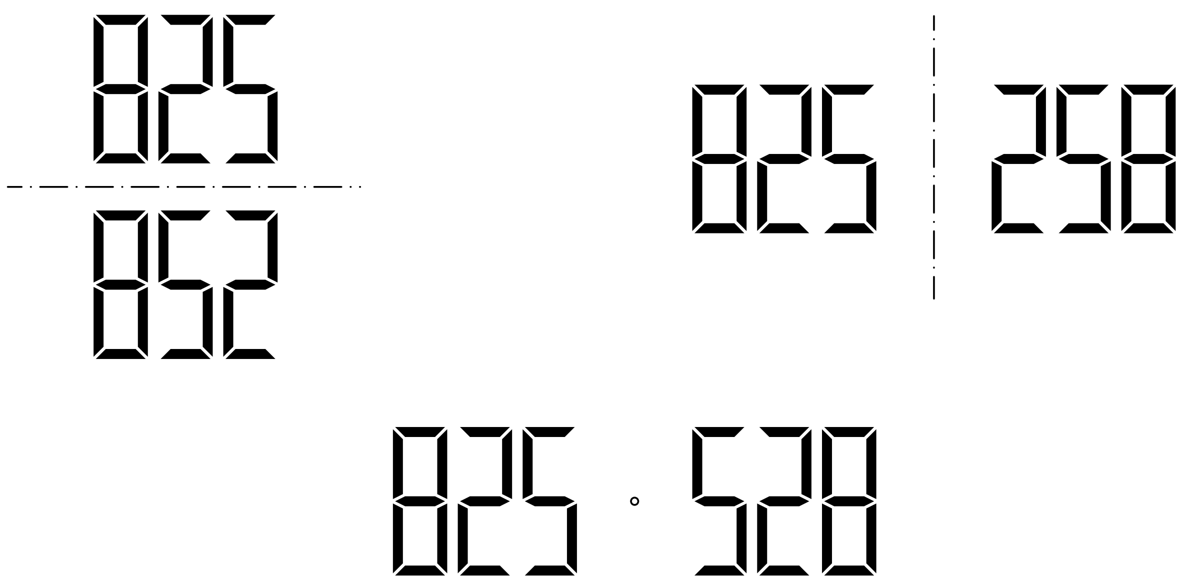
Celkový počet čísel v tejto skupine určíme rovnako ako vyššie:

$$5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 + 25 + 125 = 155.$$

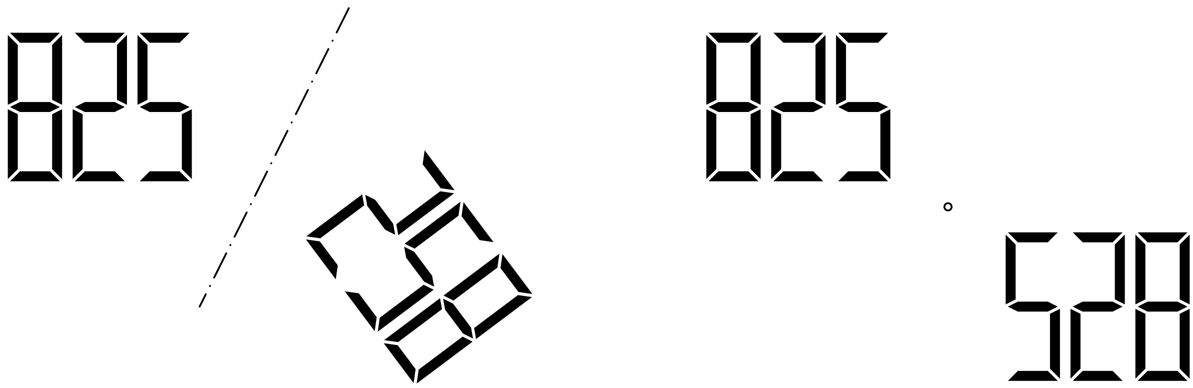
Všetky čísla zo skupiny 2) sú zahrnuté ako v skupine 1), tak v skupine 3). Okrem týchto čísel nemajú tieto tri skupiny žiadne ďalšie spoločné prvky. Celkový počet čísel vyhovujúcich zadaniu teda dostaneme tak, že k počtu čísel zo skupiny 1) pričítame počet čísel skupiny 3) zmenšený o počet čísel skupiny 2):

$$84 + 155 - 39 = 200.$$

Poznámky. Pre ilustráciu uvádzame možné obrazy čísla 825, ktoré patria do všetkých diskutovaných skupín:

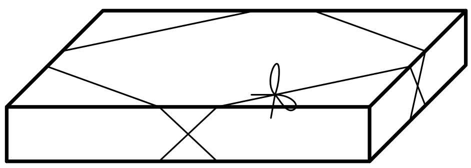


Pokiaľ by sme uvažovali súmernosti vzhľadom k všeobecným osiam, resp. stredom, budú výsledné obrazy iba pootočením, resp. posunutím niektorých obrazov uvažovaných vyššie. Na počet čísel vyhovujúcich zadaniu nemá tento všeobecnejší predpoklad žiadny vplyv.



---

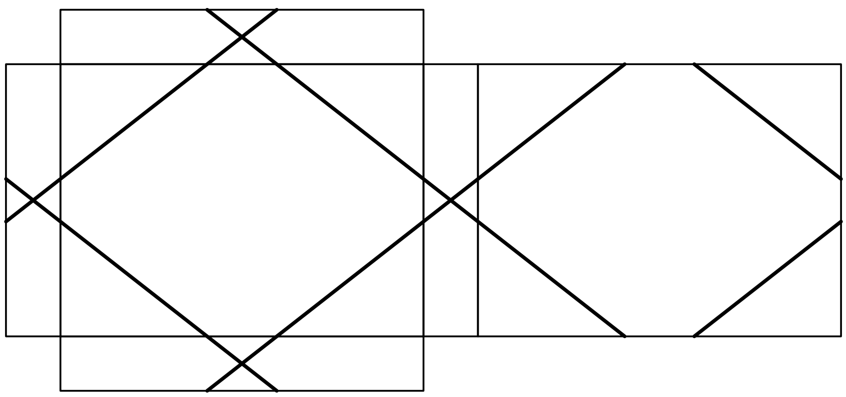
3. *Darček je zabalený do krabice, ktorej rozmery v cm sú* $40 \times 30 \times 6$*. Krabica je previazaná špagátom ako na obrázku. Určte, koľko najmenej cm špagátu je treba na previazanie krabice, ak na uzol a mašľu stačí 20 cm.* (*Marie Krejčová*)



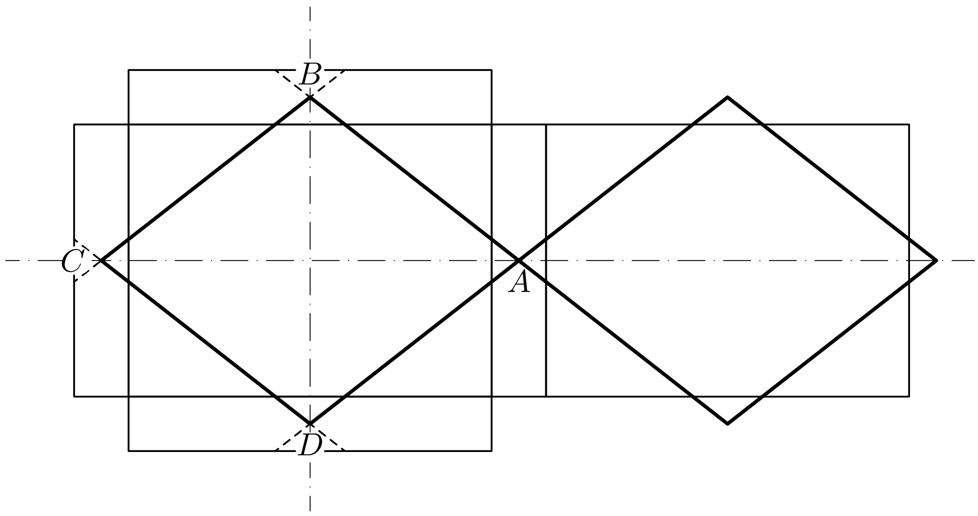
Nápad. Rozložte krabicu do roviny.

Riešenie. Špagát vždy obopína krabicu tak, aby mal čo najmenšiu možnú dĺžku. Preto po rozložení krabice do roviny tvoria stopy po špagáte časti priamok. Ďalej si uvedomme, že krabica je previazaná jedným kusom špagátu, a preto musí byť aspoň v jednom bode kríženia špagát pretočený, aby zmenil smer.

1) Najskôr predpokladajme, že všetky body kríženia sú v stredoch bočných stien. V takom prípade môže rozložená krabica s vyznačenými stopami po špagáte vyzerať takto:



Stopy v navzájom zhodných stenách sú navzájom zhodné, navyše stopy v jednotlivých stenách pozostávajú z navzájom zhodných úsečiek. Preto si môžeme ich merania uľahčiť vhodným premiestnením ich častí. Súčet dĺžok silno vyznačených úsečiek na predchádzajúcom obrázku je rovnaký ako na obrázku nasledujúcom:



Tento útvar je zložený z ôsmich zhodných úsečiek, ktorých súčet dĺžok je rovný

$$8 \cdot |AB|.$$

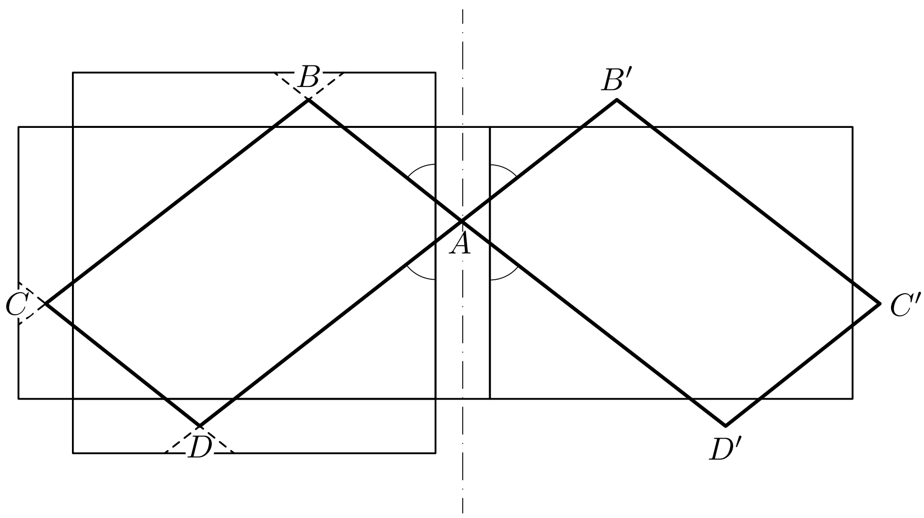
Úsečka AB je preponou v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžok $20+3 = 23$ (cm) a $15 + 3 = 18$ (cm). Podľa Pytagorovej vety platí

$$|AB| = \sqrt{23^2 + 18^2} = \sqrt{853} \doteq 29{,}2\,(\text{cm}).$$

Na previazanie krabice týmto spôsobom teda postačí špagát s dĺžkou

$$8 \cdot \sqrt{853} + 20 \doteq 253{,}6\,(\text{cm}).$$

2) Teraz predpokladajme, že body kríženia špagátu nie sú v stredoch bočných stien, avšak sú naďalej rovnako ďaleko od hornej aj dolnej steny. V tomto prípade nie sú stopy po špagáte tak súmerné ako vyššie, naďalej však platí, že tieto stopy v hornej a dolnej stene sú rovnaké (presnejšie povedané, v priemete kolmom na tieto steny stopy po špagáte splývajú). Po rozložení krabice do roviny a prípadnom preložení môže meraný útvar vyzerať napr. takto:



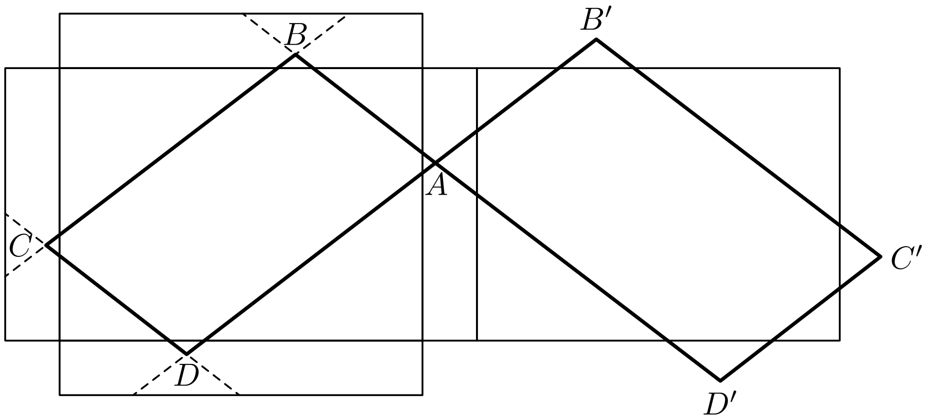
Z uvedeného vyplýva, že štvoruholníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ sú osovo súmerné, a preto sú vyznačené uhly v blízkosti vrcholu A zhodné. Z rovnakého dôvodu sú zhodné aj zodpovedajúce uhly v blízkosti každého ďalšieho vrcholu. Z toho vyplýva, že štvoruholníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ sú rovnobežníky, ktorých strany sú rovnobežné s uhlopriečkami obdĺžnikov, ktoré predstavujú hornú a dolnú stenu krabice.

Vyznačený útvar teda pozostáva z dvoch štvoríc navzájom zhodných úsečiek, ktorých súčet dĺžok je rovný

$$4 \cdot (|BA| + |AD|) = 4 \cdot (|BA| + |AD'|) = 4 \cdot |BD'|.$$

Úsečka BD' je však zhodná s analogickou úsečkou na obrázku v predchádzajúcom prípade. Jej dĺžka je teda taká istá a dĺžka špagátu potrebného na previazanie krabice sa nezmení.

3) Vo všeobecnom prípade neplatí, že stopy po špagáte v hornej a dolnej stene sú rovnaké. Naďalej však platí, že tieto stopy sú rovnobežné s uhlopriečkami hornej a dolnej steny. Po rozložení krabice do roviny a prípadnom preložení môže meraný útvar vyzerať nasledovne:



V tomto prípade rovnobežníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ nie sú zhodné. Vyznačený útvar pozostáva zo štyroch dvojíc navzájom zhodných úsečiek, ktorých súčet dĺžok je rovný

$$2 \cdot (|BA| + |AD| + |B'A| + |AD'|) = 2 \cdot (|BD'| + |DB'|).$$

Ako úsečka BD', tak úsečka DB' sú však zhodné s analogickými úsečkami na obrázkoch v predchádzajúcich prípadoch. Ich dĺžky sú teda také isté a dĺžka špagátu potrebného na previazanie krabice sa ani v tomto prípade nezmení.

Poznámka. Špagát na obrázku v zadaní úlohy je znázornený približne ako v prípade 1). Tento predpoklad však nie je v texte priamo uvedený, preto by sa s ním pracovať nemalo. Riešenie zaoberajúce sa iba týmto prípadom hodnoťte nanajvýš stupňom „dobre“.

---

4. *Peter, Martin a Juro triafali do zvláštneho terča, ktorý mal iba tri políčka s hodnotami 12, 18 a 30 bodov. Všetci chlapci hádzali rovnakým počtom šípok, všetky šípky trafili do terča a výsledky každých dvoch chlapcov sa líšili v jedinom hode. Petrov priemerný bodový výsledok bol o dva body lepší ako Martinov a ten bol o jeden bod lepší ako priemer Jurov. Určte, koľkými šípkami hádzal každý z chlapcov.*

(*Erika Novotná*)

Nápad. Určte, ako sa líšili celkové bodové výsledky niektorých dvoch chlapcov.

Riešenie. Najlepší výsledok mal Peter, stredný Martin a najhorší Juro. Výsledky každých dvoch chlapcov sa líšili v jedinom hode, preto musel Peter v tomto hode trafiť políčko s hodnotou 30, Martin políčko s hodnotou 18 a Juro 12. Odtiaľ vidíme, že Petrov celkový výsledok bol o 12 bodov väčší ako celkový súčet Martinov a ten bol o 6 bodov väčší ako súčet Jurov.

Súčasne zo zadania vieme, že Petrov priemerný výsledok bol o 2 body lepší ako Martinov a ten bol o 1 bod lepší ako priemer Jurov. Z toho vyplýva, že každý z chlapcov hádzal 6-krát ($12 : 6 = 2$, resp. $6 : 6 = 1$).

Poznámka. Hľadaný počet hodov označíme n a celkový bodový výsledok Jura, Martina a Petra označíme postupne J, M a P. Pri tomto označení možno predchádzajúce riešenie zapísať nasledovne:

$$P = M + 12, \quad \text{resp.} \quad M = J + 6,$$
$$\frac{P}{n} = \frac{M}{n} + 2, \quad \text{resp.} \quad \frac{M}{n} = \frac{J}{n} + 1.$$

Z toho vyplýva, že $12 : n = 2$, resp. $6 : n = 1$, a teda $n = 6$.

---

5. *Jaro si kúpil nové nohavice, ale boli príliš dlhé. Ich dĺžka bola vzhľadom k Jarovej výške v pomere* $5 : 8$. *Mamička mu nohavice skrátila o 4 cm, čím sa pôvodný pomer zmenšil o 4 %. Určte, aký vysoký je Jaro.* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Určte pomer dĺžky skrátených nohavíc vzhľadom k Jarovej výške.

Riešenie. Pôvodný pomer dĺžky nohavíc a výšky Jara sa po skrátení nohavíc zmenšil z $5 : 8$ na

$$\frac{5}{8} - \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{8} = \frac{96}{100} \cdot \frac{5}{8} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Výšku Jara a dĺžku nohavíc (v cm) označíme postupne j a n. Podľa zadania teda platí

$$\frac{n}{j} = \frac{5}{8} \quad \text{a} \quad \frac{n-4}{j} = \frac{3}{5}. \tag{1}$$

Z každej rovnice môžeme vyjadriť neznámu n:

$$n = \frac{5}{8}j \quad \text{a} \quad n = \frac{3}{5}j + 4.$$

Z toho zostavíme novú rovnicu s neznámou j, ktorú doriešime:

$$\frac{5}{8}j = \frac{3}{5}j + 4,$$
$$25j = 24j + 160,$$
$$j = 160.$$

Jaro je vysoký 160 cm.

Poznámka. Rovnice v (1) tvoria sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorá je ekvivalentná so sústavou

$$8n - 5j = 0,$$
$$5n - 3j = 20.$$

6. *Neznáme číslo je deliteľné práve tromi rôznymi prvočíslami. Keď tieto prvočísla zoradíme vzostupne, platí nasledujúce:*

- *Rozdiel druhého a prvého prvočísla je polovicou rozdielu tretieho a druhého prvočísla.*
- *Súčin rozdielu druhého a prvého prvočísla s rozdielom tretieho a druhého prvočísla je násobkom* 17.

Určte najmenšie číslo, ktoré má všetky vyššie uvedené vlastnosti. (*Karel Pazourek*)

Nápad. Vyjadrite súčin z druhej podmienky pomocou dvoch najmenších prvočísel.

Riešenie. Uvedené prvočísla označíme vzostupne a, b, c. Zo zadania vieme, že $b - a = \frac{1}{2}(c - b)$, čiže

$$c - b = 2(b - a), \tag{1}$$

a že číslo $(b - a)(c - b)$ je násobkom 17. Z toho vyplýva, že číslo

$$2(b - a)^2 \tag{2}$$

je násobkom 17. Keďže 17 nie je násobkom 2, je táto podmienka splnená práve vtedy, keď rozdiel $b - a$ je násobkom 17.

Aby neznáme číslo bolo najmenšie možné, musia byť aj prvočísla a, b, c najmenšie možné. Najmenšie prvočíslo je 2. Ak by bolo $a = 2$, tak najmenšie prvočíslo b, pre ktoré je rozdiel $b - a$ násobkom 17, by bolo $b = 19$. Číslo c je potom jednoznačne určené rovnosťou (1):

$$c = 2 \cdot 17 + 19 = 53,$$

a to je tiež prvočíslo. Teda najmenšie číslo s vyššie uvedenými vlastnosťami je

$$2 \cdot 19 \cdot 53 = 2\,014.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Róbert Hajduk, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Tomáš Kocák, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014