2014/2015
64. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 3. 2015.*)

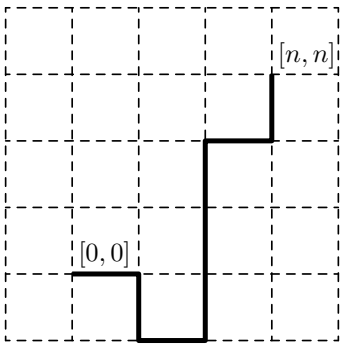
1. Nájdite všetky štvorciferné čísla n také, že súčasne platí:
i) číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel;
ii) súčet najmenších dvoch z týchto prvočísel je rovný rozdielu najväčších dvoch z nich;
iii) súčet všetkých troch prvočísel je rovný druhej mocnine iného prvočísla.

(*Radek Horenský*)

2. Pre dané prirodzené číslo n určte počet ciest dĺžky $2n+2$ z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$, ktoré žiadnym bodom neprechádzajú viackrát. Cestou dĺžky $2n+2$ z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$ rozumieme $(2n+2)$-člennú postupnosť

$$(A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{2n+1}A_{2n+2})$$

úsečiek spájajúcich dva susedné mrežové body, pričom $A_0 = [0,0]$, $A_{2n+2} = [n,n]$.



Obr. 1

(*Pavel Novotný*)

3. V ľubovoľnom trojuholníku ABC, v ktorom ťažnica z vrcholu C nie je kolmá na stranu CA ani na stranu CB, označme X a Y priesečníky osi tejto ťažnice s priamkami CA a CB. Nájdite všetky také trojuholníky ABC, pre ktoré body A, B, X, Y ležia na jednej kružnici.

(*Ján Mazák*)

4. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$a(b^2+c) = c(c+ab),$$
$$b(c^2+a) = a(a+bc),$$
$$c(a^2+b) = b(b+ca).$$

(*Michal Rolínek*)

5. Daný je trojuholník ABC, ktorého každé dve strany sa líšia aspoň o dĺžku $d > 0$. Označme T jeho ťažisko, I stred kružnice vpísanej a ϱ jej polomer. Dokážte, že

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} \geqq \frac{2}{3} d\varrho,$$

pričom S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ. (*Michal Rolínek*)

6. Dané je prirodzené číslo $n > 2$. Určte najväčšie celé číslo d, pre ktoré platí nasledujúce tvrdenie: Z ľubovoľnej n-prvkovej množiny celých čísel možno vybrať tri rôzne neprázdne podmnožiny tak, že súčet prvkov každej z nich je celočíselným násobkom čísla d. (Vybrané podmnožiny môžu mať spoločné prvky.) (*Jaromír Šimša*)