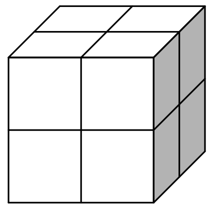
64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

1. *Erika a Peter dostali kocku, ktorá mala každú stenu rozdelenú na štyri rovnaké štvorce, pozri obrázok. Peter tvrdil, že sa dajú do všetkých štvorcov vpísať čísla* 1 *alebo* 2 *tak, aby na každej zo šiestich stien bol iný súčet. Erika naopak tvrdila, že to možné nie je. Rozhodnite, kto z nich mal pravdu.* (*Erika Novotná*)



Nápad. Aký je najväčší možný súčet na jednej stene?

Riešenie. Najmenší možný súčet, ktorý možno na stene kocky vytvoriť, je 4, a to vtedy, keď je vo všetkých štvorcoch napísané číslo 1. Naopak, najväčší možný súčet je 8, a to vtedy, keď je všade napísané číslo 2. Na jednotlivých stenách kocky môžu byť iba súčty medzi týmito dvoma hodnotami, tzn. 4, 5, 6, 7 alebo 8.

Uvedeným spôsobom je teda možné vytvoriť nanajvýš päť rôznych súčtov, avšak kocka má stien šesť. Nech už sú čísla napísané akokoľvek, musí sa aspoň jeden súčet opakovať. Pravdu preto mala Erika.

---

2. *Janíčko a Walter zbierali autíčka. Walter mal autíčka uložené v skrinke na troch poličkách. Najviac autíčok stálo na hornej poličke, na prostrednej ich bolo o tri menej ako na hornej a na spodnej poličke ich bolo o tri menej ako na prostrednej. Pritom na jednej z týchto poličiek bolo 15 autíčok. Keď si Janíčko zbierku prezrel, povedal Walterovi: „Myslel som si, že keď mám viac ako 20 autíčok, tak ich mám veľa. Teraz ale vidím, že ty máš dvakrát viac autíčok ako ja!“ Koľko autíčok mal vo svojej zbierke Janíčko?* (*Libuše Hozová*)

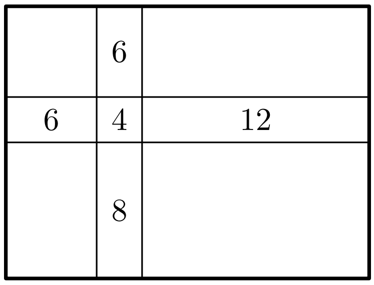
Nápad. Mohlo stáť 15 Walterových autíčok na hornej poličke?

Riešenie. Zo zadania nevieme, na ktorej poličke bolo oných 15 Walterových autíčok. Preto musíme rozlišovať nasledujúce tri prípady:

a) Keby bolo 15 autíčok na hornej poličke, bolo by na prostrednej 12 a na dolnej 9, t. j. dokopy $15+12+9=36$. Janíčko by potom mal 18 autíčok, čo je menej ako 20.
b) Keby bolo 15 autíčok na prostrednej poličke, bolo by na hornej 18 a na dolnej 12, t. j. dokopy $18+15+12=45$. Tento súčet je však nepárny, čo nie je možné (Janíčko by mal mať 22,5 autíčka).
c) Keby bolo 15 autíčok na dolnej poličke, bolo by na hornej 21 a na prostrednej 18, t. j. dokopy $21+18+15=54$. Janíčko by potom mal 27 autíčok.

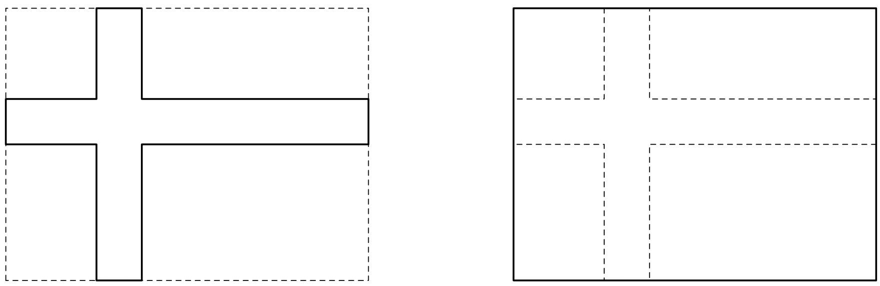
Jediný prípad, ktorý nie je v spore so žiadnou uvedenou informáciou, je c). Janíčko mal vo svojej zbierke 27 autíčok.

3. *Pán Karfiól má obdĺžnikovú záhradu rozdelenú na 9 pravouholníkových záhonov ako na obrázku. Pri piatich záhonoch sú zapísané veľkosti ich obvodov v metroch. Určte obvod celej záhrady pána Karfióla.* (Libuše Hozová)



Nápad. Pokúste sa zložiť obvod celej záhrady z úsečiek, ktoré ohraničujú záhony, ktorých obvody poznáme.

Riešenie. Pre každý zo záhonov so známymi obvodmi platí, že jeho strany sú zhodné (príp. dokonca splývajú) s úsečkami vyznačenými na obvode celej záhrady. Navyše obvod celej záhrady môže byť zložený práve z týchto úsečiek, avšak určite nie zo všetkých – napr. je možné použiť všetky úsečky okrem tých, ktoré ohraničujú záhon s obvodom 4 metre.



To znamená, že obvod celej záhrady môže byť vyjadrený pomocou daných obvodov takto:

$$6 + 6 + 8 + 12 - 4 = 28.$$

Záhrada pána Karfióla má teda obvod 28 metrov.

Poznámka. Ak predpokladáme, že prostredný záhon je štvorcový, tak je jednoduché určiť dĺžky všetkých strán všetkých záhonov a odtiaľ spočítať obvod celej záhrady. Tento predpoklad však nie je priamo uvedený v zadaní, preto by sa s ním pracovať nemalo. Riešenia založené na tomto predpoklade hodnoťte nanajvýš stupňom „dobre“.

4. *Katka, Barbora a Adela sa dohadovali, ktoré dvojciferné číslo je najkrajšie. Katka vravela, že to je to jej, pretože je deliteľné štyrmi, a keď ho napíše pospiatky, dostane iné dvojciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné štyrmi. Barbora tvrdila, že je to určite to jej, pretože jedna z jeho cifier je násobkom druhej. Adela o svojom obľúbenom čísle prezradila, že sa dá rozložiť na súčin štyroch prvočísel. Nakoniec kamarátky zistili, že hovoria všetky o tom istom čísle. Určte, ktoré číslo to bolo.* (Lenka Dedková)

Nápad. Hľadajte dvojciferné čísla, ktoré majú všetky uvedené vlastnosti.

Riešenie. Podľa Katky má byť hľadané číslo deliteľné štyrmi, je to teda jedno z nasledujúcich čísel:

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96.

Súčasne má platiť, že toto číslo napísané pospiatky dáva iné dvojciferné číslo deliteľné štyrmi. Tejto podmienke vyhovujú iba čísla

$$48, \; 84.$$

(Čísla 40, 44, 80 a 88 napísané pospiatky sú tiež deliteľné štyrmi, ale 44 a 88 nedávajú iné čísla, 40 a 80 nedávajú dvojciferné čísla.)

Podľa Barbory je hľadané číslo také, že jedna jeho cifra je násobkom druhej. Tejto podmienke vyhovuje ako 48, tak 84.

Podľa Adely možno hľadané číslo rozložiť na súčin štyroch prvočísel. Prvočíselný rozklad oboch zatiaľ vyhovujúcich čísel je

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Číslo 48 má vo svojom rozklade päť prvočísel, číslo 84 štyri prvočísla. Kamarátky hovorili o čísle 84.

---

5. *Určte, koľko rôznych riešení má nasledujúci algebrogram. Každé písmeno zodpovedá jednej cifre od* 0 *do* 5*, rôzne písmená zodpovedajú rôznym cifrám, rovnaké rovnakým.*

$$\begin{array}{r} KOSA \\ SAKO \\ \hline BABA \end{array}$$

(*Karel Pazourek*)

Nápad. Čo sa dá povedať o cifrách prislúchajúcich písmenám A a O?

Riešenie. Piatim rôznym písmenám máme priradiť rôzne cifry od 0 po 5. To znamená, že v uvedenom algebrograme nemusíme uvažovať prechod cez desiatku (súčet najväčších dvoch povolených cifier je $4 + 5 = 9$).

Najskôr si všimnime druhý a štvrtý stĺpec: Aby sme dostali $A + O = A$, musí nutne byť

$$O = 0.$$

Z prvého a tretieho stĺpca vidíme, že $K + S = B$. Pritom K a S zodpovedajú rôznym cifrám od 1 po 5 (nula už je obsadená) a ich súčet má byť rovný inej cifre od 1 po 5. Vypíšeme systematicky všetky možnosti:

K	1	1	1	2	2	3	4	3
S	2	3	4	3	1	1	1	2
B	3	4	5	5	3	4	5	5

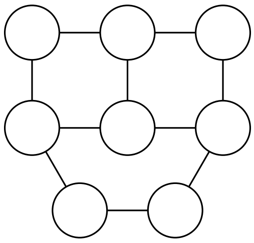
Máme celkom 8 možností, ako môže vyzerať trojica S, K, B. Zo šiestich možných cifier sú v tejto chvíli obsadené štyri, a to 8 rôznymi spôsobmi. Písmeno A potom môže zodpovedať ktorejkoľvek zo zvyšných dvoch cifier. Počet všetkých možných riešení algebrogramu je teda

$$8 \cdot 2 = 16.$$

6. *Skauti na výlete hrali hru. V lese bolo rozmiestnených 8 stanovísk prepojených špagátmi tak, ako na obrázku. Na každom stanovisku sa vydávalo jedno písmenko, prípadne pomlčka. Stanoviská sa dajú pozdĺž špagátov prebehnúť tak, že získané znaky tvoria reťazec*

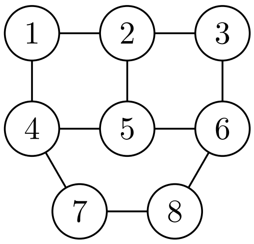
ANANAS–KOKOS–MANGO.

Priraďte jednotlivým stanoviskám zodpovedajúce znaky. (Martin Mach)



Nápad. Môže sa niektoré z písmen vydávať na viacerých stanoviskách?

Riešenie. Najskôr sa uistíme, že vo výslednom reťazci sa nachádza práve toľko rôznych znakov, koľko je stanovísk, t. j. osem. Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu si jednotlivé stanoviská očíslujeme:



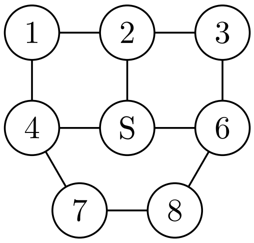
Niektoré stanoviská susedia s dvoma (1, 3, 7, 8), iné s troma ďalšími stanoviskami (2, 4, 5, 6). Určitú informáciu o rozmiestnení znakov na stanoviskách získame, keď pre každý znak v reťazci zistíme, s koľkými ďalšími znakmi susedí. S dvoma znakmi susedia štyri znaky:

- N susedí s A a G,
- K susedí s – a O,
- M susedí s – a A,
- G susedí s N a O.

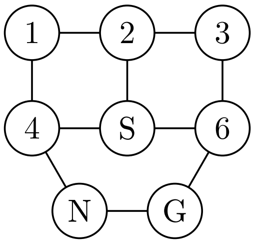
S troma znakmi susedia zvyšné štyri znaky:

- A susedí s N, S a M,
- S susedí s A, – a O,
- O susedí s K, S a G,
- – susedí s S, K a M.

Z toho vyplýva, že žiadny zo znakov A, S, O, – nemôže byť na žiadnom zo stanovísk 1, 3, 7, 8, tieto znaky teda musia byť nejako rozmiestnené na stanoviskách 2, 4, 5, 6. Medzi týmito stanoviskami vidíme, že iba stanovisko 5 susedí so všetkými ostatnými. Rovnakú vlastnosť medzi znakmi A, S, O, – má iba písmeno S. Písmeno S sa preto určite vydávalo na 5. stanovisku.

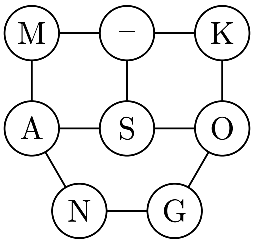


Znaky N, K, M, G sú nejako rozmiestnené na stanoviskách 1, 3, 7, 8. Medzi týmito stanoviskami spolu navzájom susedia iba stanoviská 7 a 8. Rovnakú vlastnosť medzi písmenami N, K, M, G majú iba písmená N a G. Preto sa písmeno N vydávalo na 7. stanovisku a G na 8. stanovisku, alebo naopak. Budeme uvažovať prvý prípad.



Na stanovisku 4 môže byť jedine znak, ktorý susedí s S a súčasne s N; jedinou možnosťou je A. Z podobných dôvodov môže byť na stanovisku 6 jedine O. Posledné neobsadené stanovisko zo skupiny 2, 4, 5, 6 je teraz 2, na ktoré ostáva jediný možný znak, a to –.

Na posledné dve stanoviská 1 a 3 ostávajú písmená M a K. Ich jediné možné umiestnenie je opäť určené podľa susedov (M susedí s A, K susedí s O):



Vidíme, že v tomto priradení naozaj platia všetky vyššie uvedené susedské vzťahy. Teraz je nutné ukázať, že stanoviskami je možné pozdĺž špagátov prebehnúť tak, že získané písmená tvoria onen reťazec. Riešením je nasledujúca cesta:

4 7 4 7 4 5 2 3 6 3 6 5 2 1 4 7 8 6.

Poznámka. Až na voľbu poradia písmen N a G na 7. a 8. stanovisku bolo priradenie ostatných znakov ku stanoviskám určené jednoznačne. Úloha má teda dve riešenia, ktoré sú osovo súmerné.

Značnú časť uvedeného riešenia možno samozrejme nahradiť skúšaním; podstatné je nájsť nejaké priradenie znakov stanoviskám a opísať zodpovedajúcu cestu. V takom prípade však nerozpoznáme, že viac riešení vlastne nie je.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Róbert Hajduk, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Tomáš Kocák, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014