64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

1. *Ľuboš, Martin a ich kamarátka Erika šetria na hračku. Ľuboš a Martin prispeli do spoločnej pokladničky rovnakým množstvom eur, Erika prispela inou sumou. Keby Erika prispela len tretinou z toho, čo do pokladničky dodala, celkom by mali polovicu zo sumy, ktorá je v pokladničke teraz. Koľkokrát viac eur do pokladničky dodala Erika ako Ľuboš?* (Eva Patáková)

Nápad. Akú časť celkovej sumy tvoria dve tretiny Erikinho príspevku?

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že súčet príspevkov Ľuboša a Martina a tretiny príspevku Eriky tvoria polovicu celkovej sumy. To znamená, že dve tretiny Erikinho príspevku tvoria druhú polovicu celkovej sumy. Preto jedna tretina Erikinho príspevku je rovná polovici z polovice – teda štvrtine – celkovej sumy. Erika teda prispela tromi štvrtinami a Martin spolu s Ľubošom štvrtinou celkovej sumy. Keďže Martin a Ľuboš prispeli rovnako, každý z nich dodal polovicu zo štvrtiny – teda osminu – celkovej sumy.

Erika dodala tri štvrtiny a Ľuboš jednu osminu celkovej sumy. Keďže tri štvrtiny sú to isté ako šesť osmín, vidíme, že Erika dodala do spoločnej pokladničky šesťkrát viac eur ako Ľuboš.

Poznámky. Príspevok Ľuboša, Martina a Eriky označíme postupne l, m a e, celkovú sumu označíme $c = l+m+e$. Pri tomto označení možno predchádzajúce riešenie zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$l + m + \frac{e}{3} = \frac{2}{3}e = \frac{c}{2},$$
$$\frac{e}{3} = \frac{c}{4}, \quad \text{čiže} \quad e = \frac{3}{4}c.$$

Z toho vyplýva, že

$$l + m = \frac{c}{4}.$$

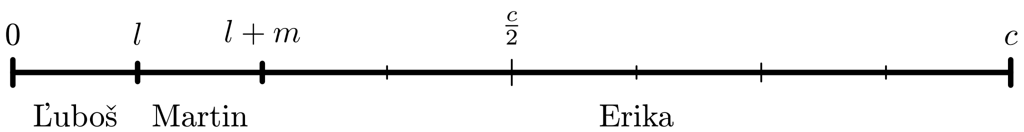
Keďže $l = m$, dostávame

$$2l = \frac{c}{4}, \quad \text{čiže} \quad l = \frac{c}{8}.$$

Spolu teda vidíme, že

$$e = \frac{3}{4}c = \frac{6}{8}c = 6l.$$

Pomocné grafické znázornenie je na nasledujúcom obrázku.

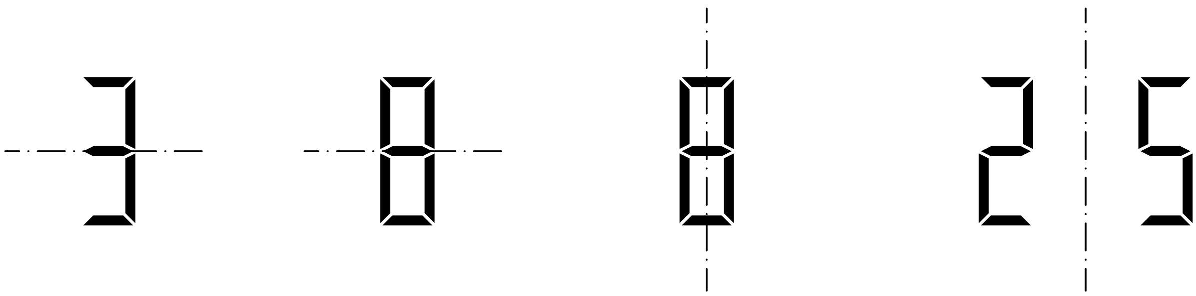


2. *Lenka sa bavila tým, že vyťukávala na kalkulačke čísla. Používala iba cifry od* 2 *do* 9 *(obr.) a čoskoro si všimla, že niektoré zápisy boli osovo súmerné. Určte počet všetkých nanajvýš trojciferných čísel s uvedenými vlastnosťami.* (*Lenka Dedková*)

Nápad. Určte osobitne počet čísel súmerných podľa vodorovnej, resp. podľa zvislej osi.

Riešenie. Jediné cifry od 2 po 9, ktoré sú súmerné podľa vodorovnej osi, sú cifry 3 a 8. Všetky nanajvýš trojciferné čísla zložené len z týchto cifier tak zodpovedajú zadaniu. Takých čísel je celkom 14:

- 3, 8,
- 33, 88, 38, 83
- 333, 888, 338, 383, 388, 833, 838, 883.



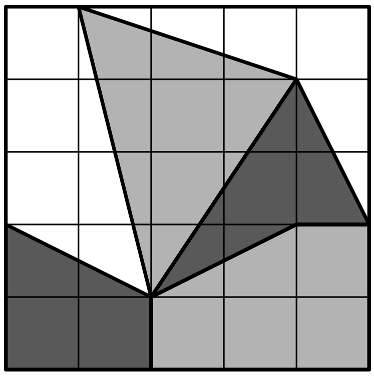
Podľa zvislej osi je súmerná jedine cifra 8. Navyše sú podľa zvislej osi navzájom súmerné cifry 2 a 5. Z týchto troch cifier možno zostaviť 7 nanajvýš trojciferných čísel vyhovujúcich zadaniu:

- 8,
- 88, 25, 52,
- 888, 285, 582.

Čísla 8, 88 a 888 sú súmerné ako podľa zvislej, tak aj podľa vodorovné osi, do celkového počtu čísel vyhovujúcich zadaniu ich teda počítame iba raz: Počet nanajvýš trojciferných osovo súmerných čísel je

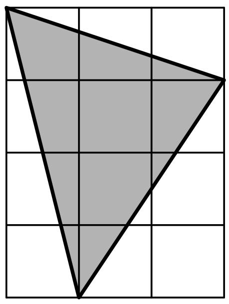
$$14 + 7 - 3 = 18.$$

3. *Podľa projektu bude dno bazénu pokryté kamienkami troch farieb tak, ako ukazuje obrázok (dno je navyše rozdelené na 25 zhodných pomocných štvorcov). Cena kamienkov na jednotku plochy sa pri jednotlivých farbách líši. Projektant počítal cenu kamienkov použitých na takto pokryté dno a na jeho prekvapenie sa za každý druh kamienkov utratí rovnaká suma. Ďalej spočítal, že keby celú plochu pokryl tými najlacnejšími kamienkami, boli by náklady 1 700 €. Zistite, aké by boli náklady, keby celé dno nechal pokryť tými najdrahšími kamienkami.* (*Libor Šimůnek*)



Nápad. Vyjadrite obsahy jednotlivých jednofarebných plôch.

Riešenie. Obsah každého jednofarebného útvaru možno spočítať pomocou sčítania a odčítania obsahov vhodných pravouholníkov a pravouhlých trojuholníkov.



Pre ilustráciu uvádzame výpočet obsahu svetlosivého trojuholníka, jednotkou je obsah pomocného štvorca:

$$3 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = 12 - 2 - 3 - 1{,}5 = 5{,}5.$$

Obsahy jednotlivých jednofarebných plôch sú:

- biela: $5 + 3{,}5 = 8{,}5$,
- svetlosivá: $5{,}5 + 5 = 10{,}5$,
- tmavosivá: $3 + 3 = 6$.

Celková cena kamienkov použitých na každej z týchto troch plôch bola podľa zadania rovnaká, najlacnejší materiál je teda svetlosivý a najdrahší tmavosivý.

Pokrytie celej plochy, t. j. všetkých 25 pomocných štvorcov, kamienkami najlacnejšej svetlosivej farby by stálo 1 700 €. Jeden štvorec by potom stál

$$1\,700 : 25 = 68 \text{ (€)}.$$

Plocha, ktorá bola naozaj pokrytá svetlosivo, teda stála

$$10{,}5 \cdot 68 = 714 \text{ (€)}.$$

Podľa zadania na rovnakú sumu vyšiel aj materiál na pokrytie 6 štvorcov kamienkami najdrahšej tmavosivej farby. Jeden taký štvorec vyjde na

$$714 : 6 = 119 \text{ (€)}.$$

Keby bolo týmito kamienkami pokryté celé dno bazénu, náklad na materiál by bol

$$25 \cdot 119 = 2\,975 \text{ (€)}.$$

Poznámka. Záverečné počítanie v uvedenom riešení je možné skrátiť nasledovne:

Podľa zadania možno za rovnakú sumu pokryť 6 tmavosivých a 10,5 svetlosivých štvorcov, t. j. 1,75-krát viac svetlosivých štvorcov ako tmavosivých (10,5 : 6 = 1,75). Tmavosivý materiál je teda 1,75-krát drahší ako svetlosivý. Pokrytie celého dna tmavosivou farbou by preto stálo

$$1,75 \cdot 1\,700 = 2\,975 \text{ (€)}.$$

---

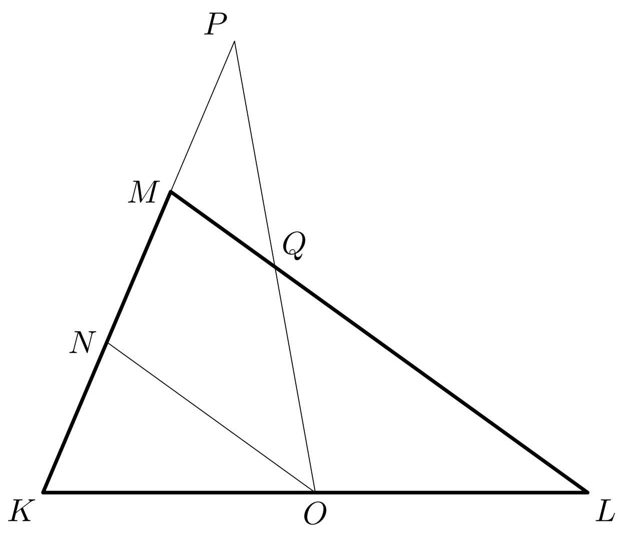
4. *Body N, O, P a Q sú vzhľadom na trojuholník KLM zadané nasledujúcim spôsobom:*

- *body N a O sú postupne stredy strán KM a KL,*
- *vrchol M je stredom úsečky NP,*
- *bod Q je priesečníkom priamok LM a OP.*

Určte, aký je pomer dĺžok úsečiek MQ a ML. (*Libuše Hozová*)

Nápad. Pripomeňte si definíciu a vlastnosti stredných priečok v trojuholníku.

Riešenie. Najskôr podľa zadania určíme polohu bodov N, O, P a Q vzhľadom na všeobecný trojuholník KLM, pozri obrázok.



Body N a O sú stredmi úsečiek KM a KL. Preto je úsečka NO strednou priečkou v trojuholníku KLM rovnobežnou so stranou ML. Platí teda $|ML| = 2|NO|$.

Bod M je stredom úsečky NP a úsečka MQ je rovnobežná s NO. Preto je úsečka MQ strednou priečkou v trojuholníku NPO a platí $|NO| = 2|MQ|$.

Spolu zisťujeme, že platí

$$|ML| = 2|NO| = 4|MQ|,$$

čiže pomer dĺžok úsečiek MQ a ML je rovný

$$|MQ| : |ML| = 1 : 4.$$

---

5. *Na starom hrade býva drak a väzní tam princeznú. Jano išiel princeznú oslobodiť, na hrade objavil troje dvier s nasledujúcimi nápismi.*

I: „Jaskyňa za dverami III je prázdna.“

II: „Princezná je v priestore za dverami I.“

III: „Pozor! Drak je v jaskyni za dverami II.“

Dobrá víla Janovi prezradila, že na dverách, za ktorými je princezná, je nápis pravdivý, pri drakovi je nepravdivý a na dverách prázdnej jaskyne môže byť napísaná pravda aj lož. Jano má na oslobodenie princeznej iba jeden pokus. Ktoré dvere má otvoriť?

(Marta Volfová)

Nápad. Vžite sa do Janovej situácie a rozhodnite, za ktorými dverami princezná byť nemôže.

Riešenie. Podľa informácií od dobrej víly vieme, že nápis na dverách, za ktorými je princezná, je pravdivý. Preto princezná nemôže byť za dverami II, a je teda buď za dverami I, alebo III.

Keby princezná bola za dverami I, bola by pravda, že jaskyňa za dverami III je prázdna. V takom prípade by drak musel byť za dverami II a na týchto dverách by tak mal byť nepravdivý nápis. Nápis ale tvrdí, že princezná je za dverami I, čo by však bola pravda. Preto princezná nemôže byť ani za dverami I.

Princezná je teda ukrytá v priestore za dverami III. Podľa nápisu na týchto dverách vieme, že drak je za dverami II a zodpovedajúci nápis je naozaj nepravdivý. Jaskyňa za dverami I je prázdna a nápis na oných dverách preto môže byť akýkoľvek.

Ak to Jano s princeznou myslí naozaj vážne, mal by otvoriť dvere III.

Poznámka. Keď nevieme, ako začať, vždy je možné vypísať všetky možnosti rozmiestnení draka a princeznej do jednotlivých jaskýň (celkom 6 možností) a v každom z týchto prípadov skontrolovať, či nápisy na dverách súhlasia s radou od dobrej víly. Ako jediný bezosporný prípad vyjde ten, ktorý sme práve odvodili.

---

6. *Matej má dve kartičky, na každú z nich napísal jedno dvojciferné číslo. Ak zaradí menšie číslo za väčšie, dostane štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné štyrmi a deviatimi. Ak zaradí naopak väčšie číslo za menšie, dostane štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné piatimi a šiestimi. Koľko dvojíc kartičiek mohol Matej vyrobiť tak, aby platili vyššie uvedené podmienky? Určte všetky možnosti.* (Michaela Petrová)

Nápad. Čo možno povedať o deliteľnosti čísel napísaných na jednotlivých kartičkách?

Riešenie. Väčšie číslo označíme $\overline{AB}$, menšie $\overline{cd}$. Prvá podmienka v zadaní hovorí, že:

- Číslo $\overline{ABcd}$ je deliteľné štyrmi, takže posledné dvojčíslie $\overline{cd}$ je deliteľné štyrmi.
- Číslo $\overline{ABcd}$ je deliteľné deviatimi, čo znamená, že ciferný súčet $A + B + c + d$ je deliteľný deviatimi.

Z druhej podmienky vieme, že:

- Číslo $\overline{cdAB}$ je deliteľné piatimi, takže cifra B je 0 alebo 5.
- Číslo $\overline{cdAB}$ je deliteľné šiestimi, takže je súčasne deliteľné troma a dvoma. Aby bolo deliteľné dvoma, musí byť cifra B párna, čo spolu s predchádzajúcim dôsledkom znamená, že $B = 0$. (Aby bolo $\overline{cdAB}$ deliteľné troma, musí byť ciferný súčet $c + d + A + B$ deliteľný troma. Z prvej podmienky však vieme, že je tento súčet deliteľný deviatimi, čo je silnejšia požiadavka.)

Spolu tak dostávame, že väčšie číslo $\overline{AB}$ je deliteľné desiatimi, menšie číslo $\overline{cd}$ je deliteľné štyrmi a ciferný súčet $A + B + c + d = A + c + d$ je deliteľný deviatimi.

Predtým, ako začneme preverovať všetky možnosti vyhovujúce uvedeným podmienkam, si môžeme všimnúť nasledujúce: Najväčšie dvojciferné číslo $\overline{AB}$ deliteľné desiatimi je 90. Najväčšie dvojciferné číslo $\overline{cd}$ deliteľné štyrmi a menšie ako maximálne možné $\overline{AB}$ je 88. Pre ľubovoľné $\overline{cd}$ platí, že nenulová cifra A taká, že súčet $A+c+d$ je deliteľný deviatimi, je určená jednoznačne. Navyše tento súčet môže byť nanajvýš $9+8+8 = 25$, takže aby bol deliteľný deviatimi, musí byť buď 9, alebo 18.

Budeme teda postupne vypisovať všetky dvojciferné násobky štyroch, ktoré sú menšie ako 90, a dosadzovať ich za $\overline{cd}$; pre každé z týchto čísel určíme číslo $\overline{AB} = \overline{A0}$ tak, aby súčet $A + c + d$ bol 9 alebo 18; skontrolujeme, či je číslo $\overline{cd}$ menšie ako $\overline{AB}$:

$\overline{cd}$	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
$\overline{AB}$	60	20	70	30	80	40	90	50	10	60	20	70	30	80	40	90	50	10	60	20
$\overline{cd} < \overline{AB}$	a	a	a	a	a	a	a	a	n	a	n	a	n	a	n	a	n	n	n	n

Matej mohol vyrobiť nanajvýš 12 rôznych dvojíc kartičiek.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Róbert Hajduk, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Tomáš Kocák, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014