2013/2014
63. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 1. – 8. 4. 2014.*)

1. Nech S je konečná množina kladných celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť. Ak x je prvok množiny S, potom aj každý kladný deliteľ čísla x patrí do množiny S. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva *dobrá*, ak pre každé x, $y \in T$, $x > y$ je podiel x/y mocninou prvočísla. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva *zlá*, ak pre žiadne x, $y \in T$, $x > y$ nie je podiel x/y mocninou prvočísla. Jednoprvkové podmnožiny sú zároveň dobré aj zlé. Nech k je veľkosť najväčšej dobrej podmnožiny množiny S. Ukážte, že k je taktiež najmenší možný počet po dvoch disjunktných zlých podmnožín množiny S, ktorých zjednotením je S.

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech B_1 je bod na strane AC taký, že B_1B je osou ostrého uhla ABC. Kolmica z bodu B_1 na stranu BC pretne kratší oblúk BC kružnice opísanej trojuholníku ABC v bode K. Kolmica z bodu B na AK pretína AC v bode L. Priamka B_1B pretína oblúk AC v bode M rôznom od B. Dokážte, že body K, L, M ležia na jednej priamke.

3. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

pre všetky x, $y \in \mathbb{R}$.

4. Body A_1, B_1 a C_1 ležia po rade vo vnútri strán BC, CA a AB trojuholníka ABC. Označme po rade A_0, B_0 a C_0 priesečníky $BB_1 \cap CC_1$, $CC_1 \cap AA_1$ a $AA_1 \cap BB_1$. Dokážte, že ak štyri trojuholníky CB_1A_0, AC_1B_0, BA_1C_0 a $A_0B_0C_0$ majú rovnaký obsah rovný jednej, tak aj tri štvoruholníky $AB_0A_0B_1$, $BC_0B_0C_1$ a $CA_0C_0A_1$ majú rovnaký obsah. Nájdite jeho veľkosť.

5. Označme α, β, γ uhly trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \sqrt{3},$$

tak potom má jeden z uhlov trojuholníka ABC veľkosť $60°$.

6. Dokážte, že každé prirodzené číslo k možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$k = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \ldots + b_n \cdot n!,$$

kde b_j, $j = 1, \ldots, n$, sú celé čísla, pre ktoré platí $0 \leqq b_j \leqq j$, $b_n \neq 0$.

7. O postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ je známe, že

$$|a_1| = 1 \qquad \text{a} \qquad |a_{k+1}| = |a_k + 1| \quad \text{pre každé } k = 1, \ldots, 2013.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}|$.

8. Pre každé prirodzené číslo $k > 1$ nájdite najmenšie prirodzené číslo $m > 1$ také, že existuje polynóm $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi a vlastnosťami:

- $P(x) - 1$ má aspoň jeden celočíselný koreň,
- $P(x) - m$ má presne k celočíselných koreňov.

9. Na priamke AC trojuholníka ABC zvolíme body M a N tak, aby $|AM| = |AB|$, $|CN| = |BC|$ a body sú na priamke v poradí M, A, C, N. Kružnice opísané trojuholníkom BCM a ABN sa pretínajú v bodoch B a K. Dokážte, že BK je osou uhla ABC.

10. Pre nezáporné čísla a, b, c so súčtom 5 nájdite maximum výrazu $a^4b + b^4c + c^4a$.

11. Na nekonečnej šachovnici máme vyznačených 100 políčok, po ktorých sa môže pohybovať veža. Medzi každou dvojicou vyznačených políčok sa dá dostať konečným počtom ťahov vežou. (Vežou môžeme ťahať medzi ľubovoľnými dvoma vyznačenými políčkami v rovnakom riadku alebo stĺpci.) Dokážte, že vieme vyznačené políčka rozdeliť na 50 dvojíc tak, že políčka každej dvojice ležia v rovnakom riadku alebo stĺpci.

12. Radikálom prirodzeného čísla N (ktorý sa označuje $\mathrm{rad}(N)$) sa nazýva súčin všetkých prvočíselných deliteľov čísla N, ktoré sa berú v prvej mocnine. Napríklad $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Existuje taká trojica po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel A, B, C, že platí $A + B = C$ a tiež $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

13. Na stranách AD a CD rovnobežníka $ABCD$ so stredom S zvolíme postupne také body P, Q aby platilo $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle CSQ| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že

a) uhly ABP a CBQ sú zhodné,
b) priamky AQ a CP sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

14. Pre reálne po dvoch rôzne a, b, c dokážte nerovnosť

$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right| + \left|\frac{a+c}{a-c}\right| + \left|\frac{c+b}{c-b}\right| \geqq 2$$

a zistite kedy nastáva rovnosť.

15. Máme štvorcovú tabuľku 2014×2014, ktorá je ako torus. Vpíšeme do nej čísla od 1 po 2014^2, každé práve raz. Nájdite najväčšie také M, že vždy existuje dvojica susedných políčok (hranou) líšiaca sa aspoň o M.

16. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$a^2 + f(b) \mid af(a) + b.$$

(Symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu všetkých kladných celých čísel.)

17. Daný je trojuholník ABC taký, že $|\measuredangle ABC| > |\measuredangle BCA|$. Nech P, Q sú také dva rôzne body na priamke AC, že $|\measuredangle QBA| = |\measuredangle PBA| = |\measuredangle BCA|$ a A leží medzi P

a C. Predpokladajme, že vnútri úsečky BQ existuje bod D taký, že $|PB| = |PD|$. Označme R priesečník polpriamky AD a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od A. Dokážte, že $|QB| = |QR|$.

18. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

(i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.

(ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2. Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q, ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť roboti R_1, Q_1 aj roboti R_2 a Q_2. Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R. To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.