

2006/2007

56. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 23. januára 2007.)

1. Zistite, aký je najmenší možný obsah trojuholníka ABC , ktorého výšky splňajú nerovnosti $v_a \geq 3$ cm, $v_b \geq 4$ cm, $v_c \geq 5$ cm. (Pavel Novotný)

2. Nech a, b sú reálne čísla. Ak má rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva rôzne reálne korene také, že ich súčet sa rovná ich súčinu, tak platí $a + b > 0$ a pritom daná rovnica nemá žiadne iné reálne korene. Dokážte. (Jaromír Šimša)

3. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC . Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC, BMC .

- Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.
- Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

(Jaroslav Švrček)

4. Nech p, q sú dané prirodzené čísla, pričom $p < q$. Určte najmenšie prirodzené číslo m s vlastnosťou: Súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré majú menovateľa m a ktorých hodnoty ležia v otvorenom intervale (p, q) , je aspoň $56(q^2 - p^2)$. (Vojtech Bálint)